حساب توقع الخسارة في حالة توافر التوزيع الاحتمالي لعدد وقيم الخسائر:

عند حسابنا للتوقع الرياضي كان يتوافر لدينا احتمال حدوث الخسارة، ومتوسط قيمة الخسارة في حالة حدوثها، وحاصل ضربهما عبارة عن التوقع الرياضي، ولكن قد يتوافر لدينا التوزيع الاحتمالي لعدد الخسائر والتوزيع الاحتمالي لقيم هذه الخسائر.

وفي هذه الحالة يتم تحديد معدل تكرار الخسارة من التوزيع الاحتمالي لقيمة الخسارة، ويضرب معدل تكرار الخسارة في متوسط قيمة الخسارة، وفي حالة حدوثها نحصل على التوقع الرياضي أو توقع الخسارة؛ أي إن:

توقيع الخسارة أو التوقع الرياضي من التوزيعات الاحتمالية = معدل تكرار الخسارة × متوسط قيمة الخسارة.

أو = متوسط عدد الخسائر لوحدة الخطر الواحدة × قيمة الخسارة.

وفيما يلي نوضح كيفية حساب توقع الخسارة من التوزيعات الاحتمالية:

مثال:

بدراسة خبرة شركة الشرق للتأمين فرع السيارات الخاصة، والتي تضمنت ٥٠٠٠ سيارة معرضة للخطر لمدة سنة؛ حصلنا على البيانات التالية حسب عدد وقيم الخسائر:

جدول (٦) التوزيع الاحتمالي لعدد الحوادث

عدد الحوادث	عدد الوحدات
٠	٤٣٠٠
١	٤٦٥
٢	١٨٠
٣	٤٥
٤	١٠
المجموع	٥٠٠٠

جدول (٧) التوزيع الاحتمالي لقيمة الخسارة

قيمة الخسارة	عدد الوحدات
٥٠٠	٤٨٢
١٥٠٠	٢٦١
٢٥٠٠	١٢٣
٣٥٠٠	٧٤
٤٥٠٠	٣٣
٥٥٠٠	١٩
٦٥٠٠	٨
المجموع	١٠٠٠

المطلوب حساب توقع الخسارة.

الحل: حيث إن توقع الخسارة =

معدل تكرار الخسارة × متوسط قيمة الخسارة؛ فإنه يتم حساب كلاً منهما كما يلي:

جدول رقم (٨) حساب معدل تكرار الخسارة

عدد الحوادث ن	عدد الوحدات ك	الاحتمال ح (ن) = ك / مجـ. ك	ن × ح (ن)
٠	٤٣٠٠	٠,٠٨٦٠	٠٠
١	٤٦٥	٠,٠٩٣	٠,٠٩٣
٢	١٨٠	٠,٠٣٦	٠,٠٧٢
٣	٤٥	٠,٠٠٩	٠,٠٢٧
٤	١٠	٠,٠٠٢	٠,٠٠٨
المجموع	٥٠٠	١,٠٠	٠,٠٢٠٠

∴ معدل تكرار الخسارة $\bar{ن}$ = مجـ. (ن × ح (ن))

= ٠,٢

جدول رقم (٩) حساب متوسط قيمة الخسارة

عدد الخسارة س	عدد الوحدات ك	الاحتمال ح (س) = ك / مجـ. ك	س × ح (س)
٥٠٠	٤٨٢	٠,٤٨٢	٢٤١
١٥٠٠	٢٦١	٠,٢٦١	٣٩١,٥
٢٥٠٠	١٢٣	٠,١٢٣	٣٠٧,٥
٣٥٠٠	٧٤	٠,٠٧٤	٢٥٩

٤٥٠٠	٣٣	٠,٠٣٣	١٤٨,٥
٥٥٠٠	١٩	٠,٠١٩	١٠٤,٥
٦٥٠٠	٨	٠,٠٠٨	٥٢
المجموع	١٠٠٠	١,٠٠	١٥٠٤

∴ متوسط قيمة الخسارة $\overline{س}$ = مجـ. (س × ح(س))

= ١٥٠٤

يلاحظ أن قيم الخسارة الموجودة بالجدول تمثل متوسـط القيم أو مراكز فئات الخسارة؛ لذلك تم استخدامها كما هي.

∵ توقع الخسارة = معدل تكرار الخسارة × متوسط قيمة الخسارة

∴ توقع الخسارة = ٠,٢ × ١٥٠٤ = ٣٠٠,٨

ملاحظات على الحل:

في هذا المثال توافر لدينا التوزيع الاحتمالي لعدد الخسائر مستقلاً عن التوزيع الاحتمالي لقيم الخسائر؛ حيث تم تقسـيم عدد الوحدات المعرضة للخطر، وعددها ٥٠٠٠ وحدة إلـى وحدات لم تتعرض لأي حـادث، وعـددها ٤٣٠٠ وحـدة، والباقية وعددها ٧٠٠ تعرضت لحادث واحد علـى الأقـل؛ حيث: تعرضت ٤٦٥ وحـدة لحـادث واحـد، وتعرضـت ١٨٠ وحدة لحادثين، وتعرضت ٤٥ وحدة لثلاثة حـوادث،

وتعرضـ..ت ١٠ وحـ..دات لأربعـ..ة حـ..وادث؛ أي إن إجمالي عدد الحوادث =

٤ × ١٠ + ٣ × ٤٥ + ٢ × ١٨٠ + ١ × ٤٦٥

= ٤٦٥ + ٣٦٠ + ١٣٥ + ٤٠

= ١٠٠٠ حادث

متوسط عدد الحوادث (معدل تكرار الحادث) = $\frac{١٠٠٠}{٥٠٠٠}$ = ٠,٢

كم تم توزيع عدد الحوادث (١٠٠٠ حادث) حسب قيمتها، إلى حوادث متوسط قيمـ..ة الخسـ..ارة الناتجـ..ة عنهـ..ا ٥٠٠، وعددها ٤٨٢ حادث، وحوادث متوسط قيمة الخسارة منهـ..ا ١٥٠٠ جنيه، وعددها ٢٦١ حادث، وحوادث متوسط قيمـ..ة الخسارة فيها ٢٥٠٠ جنيه، وعددها ١٢٤ حادثًا، وحـ..وادث متوسط قيمة الخسارة فيها ٣٥٠٠ جنيه، وعددها ٧٤ حادثًا، وحوادث متوسط قيمة الخسارة فيها ٥٥٠٠ جنيه، وعـ..ددها ١٩ حادثًا، وأخيرا حوادث متوسـ..ط قيمـ..ة الخسـ..ارة فيهـ..ا ٦٥٠٠ جنيه، وعددها ٨ حوادث؛ أي إن:

متوسط قيمة الخسارة = ٥٠٠ × $\frac{٤٨٢}{١٠٠٠}$ + ١٥٠٠ × $\frac{٢٦١}{١٠٠٠}$ + ٥٠٠ × $\frac{١٢٣}{١٠٠٠}$

+ ٣٥٠٠ × $\frac{٧٤}{١٠٠٠}$ + ٤٥٠٠ × $\frac{٣٣}{١٠٠٠}$ + ٥٠٠ × $\frac{١٩}{١٠٠٠}$

$$+ \frac{٨}{١٠٠٠} \times ٦٥٠٠$$

= ٠,٢٤١ + ٣٩١,٥ + ٣٠٧,٥ + ٢٥٩ + ١٤٨ + ١٠٤,٥ + ٥٢ = ١٥٠٤

∵ توقع الخسارة = معدل تكرار الخسارة × متوسط قيمة الخسارة

∴ توقع الخسارة = ٠,٢ × ١٥٠٤ = ٣٠٠,٨

توقع الخسارة في حالة توافر التوزيع الاحتمالي للخسائر الكلية:

في هذه الحالة فإنه يتوافر لدينا التوزيع الاحتمالي لقيم الخسائر، بداية من صفر خسارة، وحتى أقصى خسارة ممكنة، والتوزيع الاحتمالي للخسارات الكلية يشبه تمام التوزيع الاحتمالي لقيمة الخسارة السابق التعرض له في المثال السابق، إلا أنه يختلف عنه في أنه يتضمن عدد الوحدات التي لم تتعرض لحادث، وبالتالي تكون قيمة الخسارة المناظرة لها صفر، وفي هذه الحالة فإنه يتضمن متوسط عدد الخسائر، ومتوسط قيمة الخسارة معا في جدول واحد، ويتم حساب توقع الخسارة من التوزيع الاحتمالي للخسارات الكلية كما يلي:

توقع الخسارة من التوزيع الاحتمالي للخسارات الكلية= مجـ (س × ح (س)).

حيث س مراكز الفئات، ح(س) احتمال وقوع الخسارة في فئة معينة.

ونوضح من خلال المثال التالي كيفية حساب توقع الخسارة من التوزيع الاحتمالي للخسارات الكلية:

مثال: فيما يلي بيان عن التوزيع الاحتمالي للخسارات الكلية لمنزل قيمته ٦٥٠٠ جنيه، ومعرض لحادث حريق على الأكثر خلال السنة:

جدول رقم (١٠) التوزيع الاحتمالي للخسارات الكلية

قيمة الخسارة س	الاحتمال ح (س)
صفر	٠,٨٠٠٠
٥٠٠	٠,٠٩٦٤
١٥٠٠	٠,٠٥٢٢
٢٥٠٠	٠,٠٢٤٦
٣٥٠٠	٠,٠١٤٨
٤٥٠٠	٠,٠٠٦٦
٥٥٠٠	٠,٠٠٣٨
٦٥٠٠	٠,٠٠١٦
المجموع	١,٠٠

المطلوب: حساب توقع الخسارة، واحتمال حدوث الخسارة، وقيمة الخسارة المتوقعة، والتوزيع الاحتمالي لقيمة الخسارة في حالة حدوثها (الخسارة الشرطية).

الحل: حيث إنه يتوافر لدينا التوزيع الاحتمالي للخسارات الكلية فإن:

توقع الخسارة = مجـ (س × ح (س))

= صفر × ٠,٨٠٠ + ٥٠٠ × ٠,٠٩٦٤ + ١٥٠٠ × ٠,٠٥٢٢ + ٢٥٠٠ × ٠,٠٢٤٦ + ٣٥٠٠ × ٠,٠١٤٨ + ٤٥٠٠ + ٠,٠٠٦٦ + ٥٥٠٠ × ٠,٠٠٣٨ + ٦٥٠٠ × ٠,٠٠١٦

= صفر + ٤٨٢ + ٧٨,٣ + ٦١,٥ + ٥١,٨ + ٢٩,٧ + ٢٠,٩ + ١٠,٤

∴ توقع الخسارة = ٣٠٠,٨

احتمال حدوث الحادث:

حيث إن احتمال عدم حدوث خسارة هو ٠,٨ وأن المبنى معرض لحادث حريق على الأكثر خلال السنة؛ أي إما لا يتعرض لحادث خلال السنة، أو يتعرض لحادث واحد فقط؛ فإن:

احتمال حدوث حادث + احتمال عدم حدوث حادث = ١

احتمال حدوث حادث = ١ – احتمال عدم حدوث حادث

= ١ – ٠,٨ = ٠,٢

قيمة الخسارة المتوقعة:

توقع الخسارة = احتمال حدوث الحادث × قيمة الخسارة المتوقعة

٣٠٠,٨ = ٠,٢ × قيمة الخسارة المتوقعة

قيمة الخسارة المتوقعة = $\frac{٣٠٠,٨}{٠,٢}$ = ١٥٠٤ جنيه

وهذه الخسارة المتوقعة تعبر عن قيمة الخسارة في حالة حدوثها، وبمعنى آخر فإنه في حالة حدوث الخسارة فإنه يتوقع أن تكون قيمتها في المتوسط ١٥٢٠ جنيه.

التوزيع الاحتمالي لقيمة الخسارة الشرطية:

التوزيع الاحتمالي لقيمة الخسارة الشرطية؛ أي التوزيع الاحتمالي لقيمة الخسارة بشرط أن الحادث قد وقع؛ ق.د ت.م الحصول عليه من خلال ضرب احتمال حدوث أي خسارة شرطية في احتمال حدوث الحادث؛ أي إن:

احتمال حدوث حادث وتكون قيمة الخسارة ٥٠٠ جنيه

= احتمال حدوث الحادث × احتمال حدوث خسارة قيمتها ٥٠٠ جنيه بشرط أن الحادث قد وقع

احتمال حدوث خسارة قيمتها ٥٠٠ جنيه بشرط أن الحادث قد وقع

= $\frac{\text{احتمال حدوث حادث وتكون قيمة الخسارة ٥٠٠ جنيه}}{\text{احتمال حدوث الحادث}}$

= $\frac{٠,٠٩٦٣}{٠,٢}$ = ٠,٤٨٣

وأيضا احتمال حدوث خسارة قيمتها ١٥٠٠ جنيه بشرط أن الحادث قد وقع

$$= \frac{٠,٠٥٢٢}{٠,٢} = ٠,٠٢٦١$$

جدول رقم (١١) التوزيع الاحتمالي للخسائر (الشرطية)

قيمة الخسارة	الاحتمال
٥٠٠	٠,٤٨٢
١٥٠٠	٠,٢٦١
٢٥٠٠	٠,١٢٣
٣٥٠٠	٠,٠٧٤
٤٥٠٠	٠,٠٣٣
٥٥٠٠	٠,٠١٩
٦٥٠٠	٠,٠٠٨
المجموع	١,٠٠

ملاحظة:

إذا علمنا احتمال حدوث الحادث والتوزيع الاحتمالي للخسائر الشرطية؛ فإنه يمكن الحصول على التوزيع الاحتمالي للخسارات الكلية، وذلك بضرب الاحتمال المناظر لكل قيمة من قيم الخسائر الشرطية في احتمال حدوث الحادث، مع إضافة فئة في البداية قيمتها صفر واحتمالها هو مكمل احتمال حدوث الحادث (أي احتمال عدم حدوث خسارة).

فبالنسبة لبيانات جدول رقم (١١)، والخاصة بالتوزيع الاحتمالي للخسائر الشرطية إذا علمنا أن احتمال حدوث الحادث هو ٠,٢؛ فإنه بضرب الاحتمالات الموجودة بهذا الجدول في هذا الاحتمال، ثم وضع فئة في البداية قيمتها صفر واحتمالها (١ – ٠,٢ = ٠,٨) فإننا نحصل على الجدول التالي:

جدول رقم (١٢) التوزيع الاحتمالي للخسارات الكلية

قيمة الخسارة	الاحتمال
صفر	٠,٨٠٠٠
٥٠٠	٠,٠٩٦٤
١٥٠٠	٠,٠٥٣٣
٢٥٠٠	٠,٠٣٤٦
٣٥٠٠	٠,٠١٤٨
٤٥٠٠	٠,٠٠٦٦
٥٥٠٠	٠,٠٠٣٨
٦٥٠٠	٠,٠٠١٦
المجموع	١,٠٠

التوزيع الاحتمالي لمجموع الخسائر:

Probability distribution of total losses

قد ينتج عن مسبب الخطر الواحد عدة خسائر متتابعة، وفي بعض الحالات يواجه الشيء المعرض للخطر عدة

مسببات للخطر الواحد، وفي حالات أخ.رى ق.د يتع.رض الشيء المعرض للخطر لأكثر من ح.ادث خ.لال الس.نة، وأخيرا قد تكون هناك عدة وحدات معرضة للخط.ر، وك.ل منها معرضة لحادث أو أكثر خلال الس.نة، وف.ي جمي.ع الحالات السابقة يكون من الأفضل تحديد التوزيع الاحتم.الي لمجموع الخسائر خلال السنة، ب.دلاً م.ن تحدي.د التوزي.ع الاحتمالي لقيمة الخسارة الواحدة.

وقد يتساءل البعض: هل مجموع الخسائر الت.ي تح.دث خلال السنة يعتبر متغيرا عشوائيا يتم إعداد توزيع احتم.الي له؟ الإجابة بالطبع نعم؛ لأن مجموع الخسائر خلال هذا العام يختلف عن العام الماضي، وسوف يختلف عن الع.ام الق.ادم وعن بقية الأعوام القادمة، وإن كان هذا لا يمنع حدوث حالة أن يتساوى مجموع الخسائر خلال عامين، س.واء متت.اليين أو بينهما فاصل، ومن خلال دراسة مجموع الخسائر لشركة معينة خلال عدد كبير من السنوات، أو مجم.وع الخس.ائر السنوية خلال فترة الخبرة لعدد كبير من الوحدات المتماثلة؛ فإنه يمكن الحصول عل.ى التوزي.ع الاحتم.الي لمجم.وع الخسائر.

والتوزيع الاحتمالي لمجموع الخسائر يكـون متوسـطه عبارة عن متوسط عدد الحوادث مضروبا في متوسط قيمـة الخسارة الناتجة عن الحادث الواحد، ويفيد التوزيع الاحتمالي لمجموع قيم خسائر في تحديد أقصى مجموع قـيم الخسـائر السنوية المحتملة The maximum probable yearly agregat loss؛ وهو عبارة عن أكبر مجموع خسائر يمكن أن يتعرض له الشيء أو الأشياء المعرضة للخطر خلال السنة باحتمـال معين"، وبذلك فهو يتشابه مع أقصى خسـارة محتملـة The Maximum Probable loss في أنهما يعتمدان على احتمـال معين يحدده مدير الخطر؛ حيث يحدد مدير الخطر احتمـالاً وليكن ٠,٠٠٢ على الأقل، ويعتبر أن قيمة مناظرة له تعتبر أقصى خسارة محتملة (في حالة التوزيع الاحتمالي للخسـارة الواحدة)، أو أقصى مجموع خسائر محتمل (في حالة التوزيع الاحتمالي لمجموع الخسائر السنوية)، ولكن يختلف أقصـى مجموع خسائر سنوية محتملة عن أقصى خسارة محتملة في أنه يعتمد على عدد الحوادث، بالإضافة إلى قـيم الخسـائر الناتجة عن هذه الحوادث بعكس أقصى خسارة محتملة، الذي يعتمد على قيم الخسائر الناتجة عن الحادث الواحـد فقـط،

وبلغة الاحتمالات فإن أقصى مجموع خسائر سنوية محتملة تعتمد في حسابها على التوزيع الاحتمالي لمجموع الخسائر لكل عام، أما أقصى خسارة محتملة فإنها تعتمد في حسابها على التوزيع الاحتمالي للخسارة الواحدة لكل حادث.

نخلص مما سبق إلى أن التوزيع الاحتمالي لمجموع الخسائر السنوية يوضح القيم المختلفة لمجموع الخسائر السنوية التي يمكن أن تحدث، والاحتمال المناظر لحدوث كل قيمة من هذه القيم، ولتوضيح ذلك نأخذ التوزيع الاحتمالي التالي والخاص بمنشأة تمتلك ٥ سيارات، قيمة السيارة الواحدة ٢٠٠٠٠ جنيه، وكل سيارة معرضة لحادث واحد على الأكثر خلال السنة (أو تمتلك سيارة واحدة ومعرضة لخمسة حوادث على الأكثر خلال السنة)، وكان التوزيع الاحتمالي لمجموع قيم الخسائر كما يلي:

جدول رقم (١٣) التوزيع الاحتمالي لمجموع قيم الخسائر السنوية

قيمة الخسارة	الاحتمال
صفر	٠,٩٥
٢٠٠٠	٠,٢٦٥
٤٠٠٠	٠,١١٠
١٠٠٠٠	٠,٠١٧
٢٠٠٠٠	٠,٠٠٩
٤٠٠٠٠	٠,٠٠٣

٦٠٠٠٠	٠,٠٠١
المجموع	١,٠٠

ملاحظة:

حيث إن المنشأة تمتلك ٥ سيارات قيمة السيارة الواحدة ٢٠٠٠٠ جنيه؛ فإن مجموع قيم السيارات هو ١٠٠٠٠٠ جنيه، وهذه القيمة تمثل أقصى مجموع خسائر سنوية يمكن حدوثه، ومع هذا فإن أقصى مجموع خسائر سنوية في التوزيع الاحتمالي لمجموع الخسائر السنوية هو ٦٠٠٠٠ جنيه، وهذه القيمة يمكن تفسيرها إما على أساس أنها أقصى خسائر قد حدثت بالفعل خلال السنة، كما يمكن تفسيرها على أنها قيمة تحكمه، تم افتراضها للتبسيط.

أهمية تحديد التوزيع الاحتمالي لمجموع قيم الخسائر السنوية:

تبدو أهمية تحديد التوزيع الاحتمالي لمجموع قيم الخسائر السنوية في أنه يمكن الاستفادة به فيما يلي:

١- متوسط هذا التوزيع يمثل قسط الخطر، والذي يستخدم في تحديد قسط التأمين (كما سنرى فيما بعد).

٢- تحديد المخصص اللازم لمواجهة الانحرافات في قيم الخسائر الفعلية عن الخسائر المتوقعة يعتمد في حسابه على تباين هذا التوزيع.

٣- اتخاذ أي قرار فيما يتعلق بحدود الاحتفاظ، وإعادة التأمين، وأسعار إعادة التأمين، وعمولة أرباح إعادة التأمين.

٤- تحديد احتمالات دمار المنشأة Ruin Probability يعتمد على الإلمام بالتوزيع الاحتمالي لمجموع قيم الخسائر.

٥- تحديد طريقة مواجهة الخطر المناسبة يحتاج إلى الإلمام بالتوزيع الاحتمالي لمجموع قيم الخسائر.

٦- قياس الخطر (كما سنرى فيما بعد) يعتمد على متوسط وتباين التوزيع الاحتمالي لمجموع قيم الخسائر.

٧- وأخيرا فإن تحديد التوزيع الاحتمالي لمجموع قيم الخسائر يتميز بتلخيص جميع البيانات الخاصة بالخسائر في نموذج واحد.