مكيد علي

بحوث العمليات وتطبيقاتها الاقتصادية

الجزء الثاني : نظرية الشبكات ومسائل النقل والتخصيص

دروس ومسائل محلولة

ديوان المطبوعات الجامعية

مكيد علي

بحوث العمليات وتطبيقاتها الاقتصادية

الجزء الثاني

نظرية الشبكات ومسائل النقل والتخصيص

دروس ومسائل محلولة

ديوان المطبوعات الجامعية

الكتب الصادرة عن ديوان المطبوعات الجامعية لنفس المؤلف:

- الإقتصاد القياسي دروس ومسائل محلولة.......... ماي 2005
- بحوث العمليات وتطبيقاتها الاقتصادية.......... سبتمبر 2015

رقم النشر:4.01.5628
رقم ر.د.م.ك (ISBN) :978-9961-0-1879-8
رقم الإيداع القانوني: السداسي الأول 2016

الفهرس

مقدمة

يمثل هذا الكتاب محاولة متواضعة لتنويع المراجع العلمية باللغة الوطنية وإتاحة
د من الفرص لأساتذة وطلبة العلوم الاقتصادية والتجارية عامة والمختصين منهم
ميدان الاقتصاد الكمي خاصة للإلمام بالمواضيع المدرجة في هذا الكتاب وتعميق
ـهم وإدراكهم لمحتوياته.

هذا الكتاب موجه أيضا إلى المسيرين والعاملين في المجال الإداري لتعريفهم
رات وتقنيات المعالجة الكمية للمسائل الاقتصادية وتحسيسهم بأهميتها وفوائدها
مجالات اتخاذ القرار وتقدير الآثار الناجمة عن تلك القرارات.

لا شك أن سعي المؤسسة الاقتصادية المستمر إلى تحسين مستوى أدائها
لب في جزء كبير منه العمل على تحسين مستوى فعالية وكفاءة نشاط إطاراتها،
ء المسؤولين منهم على اتخاذ القرار أو الذين يعملون على تحضير وإعداد تلك
رارات، ومن هذا المنظور فإن عصرنة أدوات العمل الإداري يساهم لا محالة في
ق هذا الهدف.

إن هذا الكتاب هو الجزء الثاني الصادر في منهاج بحوث العمليات، حيث
صدار الجزء الأول– الذي تم تخصيصه لطرق ونماذج البرمجة الرياضية –.

لقد توخينا في إعداد هذا الكتاب التبسيط والابتعاد قدر الإمكان عن
ريد والمعالجة النظرية المفرطة، كما لجأنا إلى استعمال عدد كبير من الأمثلة

والمسائل المحلولة، وكل ذلك بهدف تقريب القارئ والمهتم من هذا الميدان من العلوم الاقتصادية وترغيبه على الاهتمام به ودراسته بغية الاستفادة منه.

يشتمل هذا الكتاب على مواضيع أساسية في بحوث العمليات، حيث احتوى الفصل الأول على مسألة النقل، وفيه تم التطرق إلى حالة النموذج المغلق في القسم الأول، المبحث الأول من هذا القسم خصصناه لعرض طريقة الزاوية الشمالية الغربية، في المبحث الثاني تعرضنا إلى طريقة التكاليف الصغرى، أما في المبحث الثالث فتطرقنا إلى طريقة الفروقات الكبرى. ختمنا هذا الفصل بالقسم الثاني الذي يعنى بحالة نموذج النقل المفتوح.

الفصل الثاني من هذا الكتاب يتناول مسألة التخصيص، حيث تم تخصيص المبحث الأول لعرض حالة تدنية دالة الهدف لهذه المسألة وطرق معالجتها، ثم أوردنا في المبحث الثاني طرق معالجة حالة تعظيم دالة الهدف لهذه المسألة، أما المبحث الثالث فيتناول الحالات الخاصة لمسألة التخصيص.

الفصل الثالث يحتوي على عرض مستفيض لنظرية الشبكات وتطبيقاتها المختلفة، حيث تم تخصيص القسم الأول لشبكات النقل، وفيه يجد الطالب عرضا مبسطا ووافيا لطرق تحديد المسارات ذات القيمة المثلى عبر شبكة، وفي المبحث الثاني طرق حساب التدفق الأعظم عبر شبكة، أما القسم الثاني من هذا الفصل فيتناول حالة شبكات الأعمال، حيث يتعرض المبحث الأول منه لطريقة مراقبة ومراجعة تنفيذ المشاريع (PERT/CPM) ونختم هذا الفصل بالمبحث الثاني الذي يتناول طريقة الإمكانات (M. des Potentiels).

أسأل الله التوفيق والقبول.

مكيد علي

الفصل الأول

مسألة النقل le Problème de Transport

القسم الأول

حالة العرض = الطلب (النموذج المغلق)

مشكلة النقل هي مشكلة خاصة من مسائل البرمجة الخطية، ولهذا فهي تتطلب طرقا خاصة لحلها وسوف نوضح الخصائص العامة لهذه المسألة عبر المثال التالي:

نفرض وجود عدد (n) من الأماكن (مخازن، موانئ، أسواق، أو غيرها) موجود فيها منتج معين، وكل مخزن (B_j) توجد فيه كمية من المنتجات مقدارها (b_j) (بالكغ، طن، متر، أو غيره)، بحيث (j=1,2,....,n). نريد نقل هذا المنتج إلى عدد (m) من المستعملين الذين يريدون الحصول على هذا المنتج لإشباع حاجاتهم سواء الإنتاجية أو الاستهلاكية. وكل مستعمل (A_i) يحتاج إلى كمية مقدارها (a_i) من هذا المنتج بحيث: (i=1,2,...,m).

نفرض أن تكلفة نقل الوحدة الواحدة من المنتج المذكور هي (C) فتكون إذن (C_{ij}) هي تكلفة نقل كل وحدة من هذا المنتج من عند كل مخزن (B_j) إلى كل مستعمل (A_i).

المشكل المطروح أمامنا هو: تحديد شبكة (طرق) نقل هذا المنتج من المخازن المعطاة إلى المستهلكين المذكورين بأقل تكلفة ممكنة، أو بعبارة أخرى تحديد أرخص شبكة (طرق) نقل هذا المنتج من عند المخازن إلى المستعملين.

نستطيع أن نلخص المعطيات الأولية لهذه المشكلة كالتالي:

		المخازن (B_j) والكمية المتوفرة لديهم (b_j)			
		$B_1(b_1)$	$B_2(b_2)$	....	$B_n(b_n)$
المستعملين (A_i) والكمية المطلوبة من طرفهم (a_i)	$A_1\ (a_1)$	C_{11}	C_{12}	....	C_{1n}
	$A_2\ (a_2)$	C_{21}	C_{22}	....	C_{2n}
	....	......	....		
	$A_m\ (a_m)$	C_{m1}	C_{m2}	....	C_{mn}

فمثلا: C_{11} هي تكلفة نقل كل وحدة من المنتج من المخزن (B_1) إلى المستعمل (A_1)، C_{12}: هي تكلفة نقل الوحدة من المخزن (B_2) إلى المستعمل (A_1) أما C_{1n} فهي تكلفة نقل الوحدة من المخزن (B_n) إلى المستعمل (A_1). الجدول السابق نسميه بمصفوفة التكلفة الأحادية.

إذا ما رمزنا للكمية التي يجب نقلها من المخزن (B_j) إلى كل مستعمل (A_i) بـ(X_{ij})، وافترضنا أن كل الكميات المتاحة لدى المخازن تساوي كل الكميات المطلوبة من طرف كل المستعملين. أو بعبارة أوضح يلزم أن يوزع كل مخزن كل ما عنده، وكل مستعمل يستلم كل ما يحتاجه من هذا المنتج، أي أن العرض الكلي يساوي الطلب الكلي:

$$\sum_{i=1}^{m} ai=\sum_{j=1}^{n} bj$$

$$\sum_{i=1}^{m} Xij = b_j\ ,\ (\ j=1,..,n)$$

$$\sum_{j=1}^{n} Xij = a_i\ .\ (\ i=1,..,m)$$

$$X_{ij} \geq 0$$

فإن جدول الكميات المنقولة من عند المصادر أو المنابع إلى المستعملين يكون:

X_{11}	X_{12}	X_{13}	....	X_{1n}	$= a_1$
X_{21}	X_{22}	X_{23}	....	X_{2n}	$= a_2$
......	......	....	....		......
X_{m1}	X_{m2}	X_{m3}	....	X_{mn}	$= a_m$
$= b_1$	$= b_2$	$= b_3$	....	$= b_n$	

إذن تكون تكلفة نقل الكمية (X_{ij}) من المخزن (j) إلى المستعمل (i) هي ($C_{ij}X_{ij}$)، **فمثلا**: $C_{23}\ X_{23}$: تعني تكلفة نقل الكمية (X) من المخزن الثالث إلى المستعمل الثاني. وتكون تكلفة نقل الكميات من المنتج التي يحتاجها مستعمل واحد (A_i) من كل المخازن هي: $\sum_{i=1}^{m} Cij\ Xij$، وتكون التكلفة الكلية لنقل كل الكميات من المنتج المذكورين من كل المخازن إلى كل المستعملين هي: $Z_n = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} Cij\ Xij$.

ويكون إذن المشكل المطلوب حله هو إيجاد أقل تكلفة نقل كلية ممكنة لهذا المنتج، أو بمعنى آخر إيجاد أرخص شبكة نقل ممكنة بين كل المخازن (B_j) وكل المستعملين (A_i) التي تجعل التكلفة الكلية للنقل أقل ما يمكن، وهذا يتطلب إيجاد قيم الكميات التي يجب نقلها (X_{ij}) التي تجعل دالة الهدف $Z_n = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} Cij\ Xij$ أقل ما يمكن، في ظل القيود الفنية التالية:

$$X_{11} + X_{12} + \dots\dots\dots + X_{1n} = a_1$$
$$X_{21} + X_{22} + \dots\dots\dots + X_{2n} = a_2$$
$$\dots\dots \quad \dots\dots \quad \dots\dots\dots \quad \dots\dots$$
$$X_{m1} + X_{m2} + \dots\dots\dots + X_{mn} = a_m$$

$$X_{11} + X_{21} + \dots\dots\dots + X_{m1} = b_1$$
$$X_{12} + X_{22} + \dots\dots\dots + X_{m2} = b_2$$
$$\dots\dots \quad \dots\dots \quad \dots\dots\dots \quad \dots\dots$$
$$X_{1n} + X_{2n} + \dots\dots\dots + X_{mn} = b_j$$

$\sum a_i = \sum b_j$

$X_{ij} \geq 0$

من أجل حل مسألة النقل كما هي مطروحة أعلاه، نستطيع مبدئيا استعمال طريقة الـ Simplex، ولكن نظرا لأن هذا سوف يعطينا جدولا كبيرا ومعقدا يصعب التعامل مع الأرقام الموجودة فيه، فعادة ما تستعمل طرق أخرى أكثر سهولة، ولكن بنفس مبادئ طريقة السمبلكس: أي إيجاد حل قاعدي أو ابتدائي، ثم محاولة تحسين هذا الحل حتى الوصول إلى الحل الأمثل. هناك عدة طرق تمكننا من إيجاد الحل الابتدائي وسوف نتعرض لثلاثة منهم، وأخرى تسمح بإيجاد الحل الأمثل ونوضح اثنتان منها.

في ما يتعلق بالمرحلة الأولى من الحل والمتعلقة **بالحل الابتدائي** فسيتم استعمال الطرق التالية:

طريقة الزاوية الشمالية الغربية **-CNO-** (وهي من أقدم الطرق)، طريقة التكاليف الصغرى **-MMC-** بالإضافة إلى طريقة الفروقات الكبرى - طريقة **R.W. Fogel**-.

أما في المرحلة الثانية من الحل (مرحلة البحث عن **الحل الأمثل**) فسوف نستعمل طريقة التجريب **méthode de stepping-stone**، وطريقة التحويل **(m. des transferts)**.

المبحث الأول

طريقة الزاوية الشمالية الغربية (اليسار العلوي)

تستعمل هذه الطريقة في إيجاد الحل الابتدائي أو القاعدي لمسألة النقل.

أ- يبدأ الحل حسب هذه الطريقة بوضع جدول للحل يتكون من (n) عمود و(m) صف على حسب عدد المخازن (المصادر أو المنابع) وعدد المستعملين للمنتج المراد نقله. ملء هذا الجدول يتمثل في تلبية طلب المستعملين للمنتج وذلك ابتداء من الخانة (الزاوية) الشمالية الغربية (أي طريق النقل الذي يقع في الشمال وإلى الغرب في جدول النقل) أي ذلك المخصص لنقل الكمية (X_{11}). هذه الزاوية أو الخانة توضع فيها قيمة لـ(X_{ij}) = أقل الكميتين (a_i) أو (b_j) التي تقابلها (أي أقل قيم a_i أو b_j التي تقع على العمود أو السطر المقابلين للخانة المذكورة).

مثلا: $X_{11} = \min (a_1 ,b_1)$.

ب- ثم بعد ذلك قيمة (a_1) نعوضها بالقيمة $X_{11} - a_1 = a'_1$، وقيمة b_1 نعوضها بالقيمة $X_{11} - b_1 = b'_1$.

ج- وهكذا نذهب إلى الخانة الشمالية الغربية الموالية، ونكرر نفس العملية إلى أن تشبع كل احتياجات المستعملين وتستهلك كل المخزونات أي تصبح: ($b_i = 0$, $a_i = 0$)، ونكون عندئذ قد حصلنا على حل يسمى بالحل القاعدي أو الابتدائي.

من شروط الوصول إلى حل **ابتدائي مقبول** هو أن يكون في جدول النقل المحصل عليه بعد الحل الابتدائي عدد طرق النقل المستخدمة لنقل المنتج يساوي عدد المصادر (المخازن) + عدد نقاط الوصول (المستعملين) - 1، أي: $m + n - 1$.

نلاحظ أنه عند شحن كل طريق نقل (ملء كل خانة (ij)، يلزم أن نحصل إما على: $a'_i = 0$ أو $b'_j = 0$ أو $a'_i = b'_j = 0$.

لأنه إذا كانت $b_j > a_i$ أو (الكمية المتوفرة) < (الكمية المطلوبة)، فإن:

$$X_{ij} = \min (a_i , b_j) = a_i$$

$$a_i < b_j \rightarrow a'_i = a_i - a_j = 0$$

$$b'_j = b_j - a_i > 0$$

وإذا كانت $a_i > b_j$ فإن:

$$X_{ij} = \min (a_i , b_j) = b_j$$

$$a_i > b_j \rightarrow a'_i = a_i - b_j > 0$$

$$b'_j = b_j - b_j = 0$$

وإذا كانت $a_i = b_j$ فإن:

$$X_{ij} = \min (a_i , b_j) = a_i = b_i$$

$$a_i = b_i \rightarrow a'_i = a_i - a_i = 0$$

$$b'_j = b_j - b_i = 0$$

مثال: تتخصص مؤسسة النصر في إنتاج البراغي، تتمركز وحداتها الإنتاجية في مدن بسكرة (B_1)، سعيدة (B_2) ومسيلة (B_3). أهم زبائنها لتجارة الجملة موجودون في مدن الشلف (A_1)، ورقلة (A_2) وتلمسان (A_3). الجدول التالي يعطي تكلفة نقل الوحدة من المنتج المذكور من الوحدة الإنتاجية (B_j) إلى تجار الجملة (A_i) بحيث ($i=1,2,3$) و($j=1,2,3$)، ويعطينا كذلك الكميات المتوفرة عند كل وحدة إنتاجية والكميات المطلوبة من طرف كل مستعمل. المطلوب إيجاد الكميات (X_{ij}) اللازم نقلها من عند كل وحدة إنتاجية إلى كل تاجر جملة بحيث تكون تكلفة النقل الكلية أقل ما يمكن.

	B_1	B_2	B_3		
A_1	3	2	4	25	الكميات
A_2	1	4	3	30	المطلوبة
A_3	4	2	5	35	
	20	50	20	90 \ 90	

الكميات المتوفرة أو المتاحة في المخازن

-1 البحث عن الحل الابتدائي:

نتأكد أولا من أن مجموع الكميات المعروضة من طرف الوحدات الإنتاجية والكميات المطلوبة من طرف المتعاملين التجاريين هي متساوية وكلاهما يساوي 90 وحدة.

إذا ما استعمالنا طريقة الزاوية الشمالية الغربية أو العلوية إلى اليسار، فإننا نبدأ هذا الحل بوضع جدول للحل يتكون من ثلاث أعمدة = عدد الوحدات الإنتاجية بحيث يخصص عمود لكل وحدة إنتاجية، وثلاث صفوف أيضا = عدد المتعملين. لكي نملأ هذا الجدول، نأخذ الخانة الشمالية الغربية (طريق النقل الذي يقع في الشمال الغربي)، بمعنى طريق النقل الذي يجمع الوحدة الإنتاجية (a_1) بالمتعامل التجاري (b_1) ونجري العمليات المطلوبة في القواعد أ ب ج السابق الإشارة إليها.

نختار إذن الخانة (1,1) في الجدول الفارغ ونملأها بأقل القيمتين $25=a_1$ أو $b_1=20$، فنضع فيها إذن الكمية 20 وهي قيمة b_1 وهذا يعني أن قيمة $X_{11}=20$، فتصبح:

نلاحظ أن الكمية المقابلة للعمود الأول $a'_1 = a_1 - X_{11} = 5$ و $b'_1 = b_1 - X_{11} = 0$ (الكمية المتاحة لوحدة الإنتاج الأولى) قد استهلكت كلها، بمعنى أن كل المتاح من المنتوج في مخازن وحدة الإنتاج الأولى (b_1) قد وزع كله وبالتالي فإن هذه الوحدة قد استنفذت كل مخزونها، الذي سلمته للمتعامل (a_1). على إثر هذا نشطب العمود الأول على أساس أن الوحدة ج. الأولى قد استنفذت كل مخزونها ولن تشارك بعد هذا في عمليات التوزيع اللاحق، وتصبح الخانة الشمالية الغربية الآن هي طريق النقل الذي يجمع الوحدة الإنتاجية (a_1) بالمتعامل التجاري (b_2)، (جدول I).

جدول -I-

20	X		5
			30
			35
0	50	20	

نلاحظ الآن أن قيمة $a'_1 = 5$ و $b_2 = 50$ هما الكميتان المقابلتان لطريق النقل (a_1b_2)، فنضع في هذا الطريق الكمية (X_{12}) التي تساوي 5 وحدات. الآن السطر الأول استهلك بالكامل، بمعنى أن كل احتياجات المستعمل الأول (a_1) قد أشبعت من طرف الوحدات (b_1) و (b_2) والخانة الغربية الشمالية الآن هي (a_2 ,b_2) أنظر الجدول II.

20	5		0
	X		30
			35
0	45	20	

جدول -II-

نجري عمليات مشابهة للعمليات السابقة فنحصل على الجدول IV.

جدول -IV-

	5		0
	30		0
	X		35
0	15	20	

الكميات المقابلة للسطر 1 و2 والعمود 1 كلها استنفذت، والخانة الغربية الشمالية الآن هي $(a_3،b_2)$.

نجري العمليات المطلوبة فنحصل على الجدول V.

جدول -V-

20	5		0
	30		0
	15	X	20
0	0	20	

استنفذ إلى حد الآن الكميات المقابلة للسطرين 1،2 والعمودين 1،2. وبقي طريق النقل الذي يجمع بين $(b_3،a_3)$. بإجراء العمليات المطلوبة نحصل على الجدول VI.

جدول -VI-

20	5		0
	30		0
	15	20	0
0	0	0	

هذا هو الحل الابتدائي (la solution de base)، وفيه عدد طرق النقل المستعملة = 5،وهي تساوي العدد المطلوب حسب المقيـــاس (m +n-1=3+3-1).

إذن فهذا الحل الابتدائي مقبول.

نضيف إلى الجدول السابق (جدول VI) التكلفة الأحادية للنقل المناسبة فنحصل على الجدول التالي:

	B_1	B_2	B_3	
25	3 / 20	2 / 5	4 / 0	A_1
30	1 / 0	4 / 30	3 / 0	A_2
35	4 / 0	2 / 15	5 / 20	A_3
	20	50	20	

نضرب كل الكميات المنقولة عبر طرق النقل المحصل عليها في الحل الابتدائي في تكاليف النقل الأحادية فنحصل على التكلفة الكلية للحل الابتدائي وهي:

20. 3 + 5. 2 + 30. 4 + 20. 5 + 15. 2 = 320 و.ن.

هذه هي التكلفة الكلية **الدنيا** للنقل في المرحلة الحالية، التي تمكننا من نقل الكميات المطلوبة من عند الوحدات الإنتاجية إلى الوحدات التجارية بأقل تكلفة، والتي تتمثل في نقل الكمية 20 وحدة من عند (b_1) إلى (a_1) و5 وحدات من عند (b_2) إلى (a_1) وكذلك 30 وحدة من عند (b_2) إلى (a_2)، 15 وحدة من عند (b_2) إلى (a_3) وأخيرا 20 وحدة من عند (b_3) إلى (a_3). هل هذه هي أرخص شبكة للنقل التي تمكننا من نقل الكميات المطلوبة من الوحدات الإنتاجية إلى المؤسسات التجارية أم لا.

في الحقيقة لا يمكننا الجزم بذلك ويجب علينا البحث عن إمكانيات تخفيض هذه التكلفة إلى مستوى أدنى من المستوى الحالي إذا كان ذلك ممكنا. إن عملية البحث عن حل أحسن من الحل الحالي تعني البحث عن الحل الأمثل.

2- تحسين الحل الابتدائي وإيجاد الحل الأمثل:

سوف نتعرض لطريقتين لإيجاد الحل الأمثل، سنستخدم أولا طريقة التجريب (طريقة **stepping-stone**) ثم نوضح في ما بعد خطوات الحل بالطريقة الثانية (طريقة التحويل).

طريقة التجريب:

محتوى هذه الطريقة يتمثل في أننا نجرب كل طرق النقل غير المستعملة في الحل الابتدائي وذلك بإدخالها إلى شبكة النقل واحدة بعد الأخرى ونرى مدى

تأثيرها على تخفيض التكلفة الكلية للنقل المحصل عليها في الحل الابتدائي. هذه الطريقة تعتمد على التجريب والشيء الأساسي فيها هو ضرورة احترام الترتيب في عملية التجريب، بمعنى أنه عند تجريب طرق النقل غير المستعملة في الحل الابتدائي يجب الانطلاق من اليمين إلى اليسار دائما أو العكس كذلك دائما.

أ – نختبر طريق النقل غير المستعمل الذي يجمع بين (A_1) و(B_3): المستعمل (A_1) يحتاج إلى 25 وحدة و(B_3) لديه 20 وحدة فقط، فيزوده بها وذلك باسترجاعها من عند (A_3) أما (B_3) عندما يزود الآن (A_1) باحتياجاته فيصبح الآن يتحمل تكلفة نقل هذه الكمية إلى (A_1) والتي تساوي (4 و.ن للوحدة)، وبالمقابل يتخلص من تكلفة نقل كان يدفعها سابقا إلى (A_3) والتي كانت تساوي (5 و.ن للوحدة). الآن (A_1) أصبح يتلقى في المجموع 45 وحدة وهو يحتاج 25 وحدة فقط أما (A_3) فلا يحصل الآن إلا على 15 وحدة وهو يحتاج 35 وحدة، وهذا يتسبب في اختلال توازن الكميات التي يتحصل عليها كلاهما. لذلك فإن (A_1) عندما أصبح يتزود الآن من عند (B_3) بمقدار (20 وحدة) من المنتوج يجب أن يتخلى عن نفس الكمية التي كان يتلقاها إما من عند (B_1) أو من عند (B_2) لصالح (A_3). أي يجب على (A_1) أن يعوض لـ (A_3) نفس الكمية عن طريق (B_1) أو عن طريق (B_2) أو كليهما.

ولكن نلاحظ أن (B_2) لا تستطيع أن تعوض لـ (A_3) من عند (A_1) إلا الكمية (5). بينما (B_1) لا يمكنه تعويض (A_3) من عند (A_1) لأن هذا الطريق غير ممكن (غير مستعمل أصلا). إذن فـ (B_3) لا يستطيع تزويد (A_1) إلا بخمس وحدات

على أساس أن (A_1) تعوض لـ (A_3) أيضا 5 وحدات من عند (B_2)، هذه هي الكمية التي يمكن تبادلها فقط بين (A_1) و(A_3).

(B_2) عندما تعطي الـ (5 وحدات) لـ (A_3) من عند (A_1) فإنها تصبح تتحمل تكاليف نقل جديدة إلى (A_3) والتي تساوي 2 وحدة نقدية للوحدة، وتتخلص من تكلفة نقلها إلى (A_1) والتي كانت تساوي 2 و.ن/للوحدة أيضا.

نلاحظ أن إدخال هذا الطريق الجديد إلى شبكة النقل أدى إلى انخفاض في تكلفة النقل بمقدار وحدة نقدية واحدة لكل وحدة منتوج منقولة (-5 + 4 - 2 + 2 = 1-)، هذا يعني أن إدخال الطريق الجديد إلى شبكة النقل المحصل عليها سابقا في الحل الابتدائي ساهم في تخفيض تكلفة نقل الوحدة بـ (1 و.ن) عما كان عليه سابقا.

والتخفيض الكلي في تكلفة نقل الـ 5 وحدات = 5 و.ن.، أي انخفاض التكلفة الكلية للنقل بمقدار (5 و.ن). وتصبح التكلفة الإجمالية للشبكة الجديدة الآن هي: 320 - 5 = 315 و.ن.

وما دمنا نبحث عن تخفيض تكاليف النقل إلى أدنى حد ممكن، فمعنى هذا أن هناك تحسن في الحل الابتدائي نتيجة لإدخال هذا الطريق إلى شبكة النقل السابقة والتخلص من طريق النقل الذي يجمع بين (B_2) و(A_1). وتصبح شبكة النقل الجديدة هي:

	B_1	B_2	B_3	
25	3 / 20	2 / 0	4 / 5	A_1
30	1 / 0	4 / 30	3 / 0	A_2
35	4 / 0	2 / 20	5 / 15	A_3
	20	50	20	

ب- نجرب الطريق (B_2,A_1). نجرب الطرق غير المستخدمة من جديد، وذلك باحترام الترتيب من اليمين إلى اليسار الذي اعتمدناه في البداية. (A_1) تحتاج إلى (25 وحدة)، (B_2)كانت عندها (50 وحدة)، فيجب أن تزودها بال (25 وحدة) التي تحتاجها، وذلك باسترجاعها إما من عند (A_2) أو من عند (A_3). إذا ما أخذنا إمكانية الاسترجاع من عند (A_2)، فإن (A_1) عندما تتسلم الكمية (25) من عند (A_2) يجب عليها أن تتخلى على نفس الكمية لـ (A_2) التي كانت تتسلمها عن طريق (B_1) أو (B_3). ولكن نلاحظ أن (A_1) لا تستطيع تعويض (A_2) بمقدار (25) وحدة عن طريق B_1 أو B_3 وذلك لأن طرق النقل (B_1 A_2)، (B_3 A_2) غير مستعملة. بقي (A_3)، يستطيع (B_2) أن يسحب كمية مقدارها (20 وحدة) من عند (A_3) لتزويد (A_1). ولكن (A_1) لا يستطيع تعويض (A_3) إلا بـ 5 وحدات عن طريق (B_3). أما عن طريق (B_1) فلا يستطيع، لأن هذا الطريق غير مستعمل أصلا.

في المحصلة (B_2) لا يستطيع تزويد (A_1) إلا بـ 5 وحدات من عند (A_3)، ويتحمل بذلك تكلفة نقل جديدة إلى عند (A_1) مقدارها هو (2 و.ن./للوحدة)، في المقابل (A_1) تعوض لـ (A_3) 5 وحدات عن طريق (B_3)، و(B_3) يتحمل تكاليف نقل جديدة إلى عند (A_3) مقدارها (5 و.ن./للوحدة) ويتخلص من تكلفة نقل كان يدفعها سابقا إلى عند (A_1) مقدارها (4 و.ن./للوحدة).

ويكون التغير في تكلفة نقل الوحدة نتيجة إدخال هذا الطريق هو (+2 -2 +5 -4 - + 1) وتكون محاولة تجريب إدخال طريق النقل المشار إليه مرفوضة لأنه يساهم في زيادة تكاليف نقل الوحدة بمقدار (1 و.ن) والتكلفة الكلية بمقدار 5× 1 = 5 و.ن عما كان عليه سابقا. ننتقل الآن إلى تجريب طريق النقل غير المستخدم **الموالي حسب الترتيب** وهو طريق النقل الذي يجمع بين (A_2) و(B_3).

ج- نجرب طريق النقل B_3A_2.

(A_2) تحتاج إلى 30 وحدة، (B_3)كانت عندها 20 وحدة، فلكي تزود (A_2)بهذه الكمية يجب أن تأخذها إما من عند (A_3) أو (A_1).

فإذا ما أخذت 15 وحدة من عند (A_3) وسلمتها لـ (A_2)، فإن (A_2) تعوض لها نفس الكمية عن طريق (B_2). ثم تحاول أن تعطيها أيضا (5 وحدات) من عند (A_1).

ولكن (A_2) لا تستطيع أن ترجع لـ (A_1) 5 وحدات التي يمكن أن تسلمهم منها لا عن طريق B_2 ولا B_1 لأن طرق النقل المعنية غير مستعملة حاليا. إذا فلا نستطيع (B_3) أن تعطي لـ (A_2) إلا 15 وحدة من عند (A_3). وتتحمل بذلك تكلفة نقل جديدة مقدارها (3 و.ن/للوحدة) وتتجنب تكلفة نقل سابقة قيمتها

(5 و.ن/للوحدة). أما (B_2) فتعوض 15 وحدة لـ (A_3) من عند (A_2) وتتحمل بذلك تكلفة نقل جديدة (2 و.ن/للوحدة) وتتجنب تكلفة نقل (4 و.ن/للوحدة) كانت تدفعها سابقا إلى عند (A_2).

ويكون مجموع التغير في التكلفة الأحادية للنقل الناتج عن إدخال طريق النقل الجديد هي: (-5 + 3 + 2-4 = -4) وهذا يعني انخفاض في التكلفة الأحادية للنقل مقداره 5 وحدات نقدية، ويصبح مقدار الانخفاض في التكلفة الكلية للنقل الناتج عن تحويل 15 وحدة من $(A_3$ إلى $A_2)$ هو (4×15=60 و.ن).

وتصبح قيمة التكلفة الكلية للنقل إذا ما أدخلنا هذا الطريق للنقل تساوي 255 = 60 - 315 و.ن.، وهذا معناه أن إدخال طريق النقل $(A_2 B_3)$ إلى شبكة النقل المحصل عليها سابقا يساهم في تخفيض تكلفة النقل بمقدار 60 و.ن.، فندخله إذن في شبكة النقل السابقة وتصبح الشبكة الجديدة هي:

	B_1	B_2	B_3	
25	3 / 20	2 / 0	4 / 5	A_1
30	1 / 0	4 / 15	3 / 15	A_2
35	4 / 0	2 / 35	5 / 0	A_3
	20	50	20	

نجري الاختبار من جديد لتحسين الحل المحصل عليه وذلك بإعادة التجريب من جديد من البداية (من اليمين إلى اليسار)، ونحاول في هذه الحالة إدخال طريق النقل غير المستخدم ($B_2 A_1$).

د- نجرب طريق النقل $B_2 A_1$:

(A_1) يحتاج إلى 25 وحدة وB_2 عنده (50 وحدة)، فيزود إذن (A_1) بـ 25 وحدة التي تحتاجها وذلك باسترجاعها من عند (A_2) أو (A_3) إما عن طريق (B_3) أو (B_1).

نلاحظ أن (A_1) لا تستطيع أن تعطي أي شيء لـ A_3 لا عن طريق (B_3) ولا عن طريق (B_2) لأنها طرق نقل غير مستخدمة حاليا. أما (A_1) فتستطيع أن ترجع (5 وحدات) فقط إلى (A_2) عن طريق (B_3) وتتحمل بذلك 4 و.ن/للوحدة كتكلفة نقل جديدة، وتتجنب 3 و.ن كتكلفة سابقة.

إذن فـ (B_2) لا تستطيع أن تزود (A_1) إلا بـ 5 وحدات من عند (A_2) وتتحمل بذلك تكلفة مقدارها 2 ون/للوحدة وتتجنب دفع تكلفة قيمتها 4 و.ن/للوحدة).

ويكون مجموع الانخفاض في التكلفة الإضافية الأحادية الناتجة عن إدخال طريق ($B_2 A_1$) يساوي 3 و.ن/للوحدة (- 4 + 3 -4 + 2 = - 3) وانخفاض في التكلفة الكلية الناتج عن تحويل 5 وحدات من A_1 إلى A_2 مقداره: 5 × (- 3) = 15 و.ن. والتكلفــة الإجمالية تصبح كالتالي:255 – 15 = 240 و.ن.

إدخال طريق النقل ($B_2 A_1$) إلى شبكة النقل المحصل عليها في المرحلة السابقة يساهم في تخفيض تكلفة النقل بمقدار 15 و.ن، فندخله إذن في شبكة النقل السابقة وتصبح الشبكة الجديدة هي:

	B_1	B_2	B_3	
25	3 20	2 5	4 0	A_1
30	1 0	4 10	3 20	A_2
35	4 0	2 35	5 0	A_3
	20	50	20	

نجرب من جديد، وندخل طريق النقل غير المستخدم $B_3 A_1$.

هـ – ندخل طريق النقل ($B_3 A_1$):

(A_1) تحتاج إلى 25 وحدة، و(B_3) عندها 20 وحدة فتزودها بها وذلك باسترجاعها من عند (A_2)، ولكن بما أن (A_1) لا تستطيع أن ترجع إلى (A_2) إلا 5 وحدات عن طريق (B_2) ولا تستطيع أن ترجع إلى (A_2) أي شيء عن طريق (B_1). إذن فـ B_3 لا تستطيع أن تزود A_1 إلا بـ 5 وحدات، وتتحمل بذلك تكلفة نقل جديدة مقدارها 4 و.ن/للوحدة وتتجنب تكلفة سابقة قيمتها 3 و.ن/للوحدة.

أما (B_2) فتتحمل تكلفة جديدة قدرها 4 و.ن/للوحدة وتتجنب تكلفة سابقة قيمتها 2 و.ن/للوحدة، ويكون مجموع التغير في تكلفة نقل الوحدة الواحدة هو ثلاث وحدات نقدية (+3).

وهذا يعني أنه لو تدخل طريق النقل المشار إليه فسيترتب عليه زيادة في تكاليف النقل بمقدار 3 و.ن. لكل وحدة منقولة وبالتالي يجب رفض إدخال هذا الطريق.

و- نجرب طريق النقل A_2 B_1:

(B_1) تعطي لـ (A_2) 10 وحدات فقط من عند (A_1) لأن (A_2) لا تستطيع أن ترجع إلا 10 وحدات لـ (A_1) عن طريق (B_2) ولاشيء عن طريق (B_3). فـ (B_2) لو قامت بهذا الإجراء فتتحمل 2 و.ن كتكلفة نقل جديدة وتتجنب تكلفة مقدارها 4 و.ن/للوحدة أما (B_1) فتتحمل تكلفة مقدارها1 و.ن/للوحدة وتتجنب تكلفة 3 و.ن/للوحدة.

سوف يترتب إذن عن إدخال طريق النقل المشار إليه انخفاض في تكلفة النقل الأحادية بمقدار 4 و.ن. (-3 + 1- 4 + 2 = -4 و.ن/للوحدة)، وتكون تكلفة تبادل 10 وحدات مابين A_1 و A_2 هي4.10 = 40 و.ن وتصبح تكلفة شبكة النقل الجديدة هي 240 - 40 = 200 و.ن.

شبكة النقل الناتجة عن إدخال طريق النقل المشار إليه هي:

	b_1	b_2	b_3	
25	3 / 10	2 / 15	4 / 0	a_1
30	1 / 10	4 / 0	3 / 20	a_2
35	4 / 0	2 / 35	5 / 0	a_3
	20	50	20	

ل– نجرب الطريق (B_3 A_1):

نلاحظ أن (A_1) لا تستطيع أن ترجع إلا 10 وحدات لـ (A_2) عن طريق (B_1) ولا شيء عن طريق (B_2)، إذن (B_1) يتخلى عن تكلفة أحادية قدرها (3 و.ن/للوحدة) ويتحمل تكلفة أحادية أخرى تقدر بـ (1 و.ن/للوحدة). ومن جهة أخرى (B_3) لا تزود (A_1) إلا بـ 10 وحدات من عند (A_2) وتتحمل بذلك تكلفة أحادية قدرها (4 و.ن / للوحدة) وتتخلى عن تكلفة كانت تدفعها سابقا بمقدار (3 و.ن/للوحدة).

يترتب إذن على إدخال طريق النقل b_3 a_1 انخفاض في التكاليف الأحادية للنقل بمقدار وحدة نقدية واحدة (-3 + 1-3 + 4 = -1) وتكون تكلفة تبادل 10 وحدات بين a_1،a_2 هي 10×1 = 10 و.ن/للوحدة بالانخفاض، أي أن التكلفة الكلية للنقل تصبح 200 - 10 = 190 و.ن.

شبكة النقل الجديدة تصبح كالتالي:

	B_1	B_2	B_3	
25	3 / 0	2 / 15	4 / 10	A_1
30	1 / 20	4 / 0	3 / 10	A_2
35	4 / 0	2 / 35	5 / 0	A_3
	20	50	20	

ب- نجرب طريق النقل B_1A_1:

(B_1) لا تستطيع أن تعطي لـ (A_1) إلا 10 وحدات من عند (A_2) ولا تستطيع
ن تعطي أي شيء عن طريق (A_1) لأن (A_1) لا تستطيع أن ترد إلى (A_2) إلا 10
حدات عن طريق (B_1) وتتحمل بالتالي (B_3) قيمة 3 و.ن/للوحدة كتكلفة
ل جديدة وتتخلى عن تكلفة قيمتها 4 و.ن/للوحدة. أما (B_1) فتدفع 3
ن/للوحدة وتتخلى عن 1 و.ن /للوحدة كتكلفة كانت تدفعها سابقا. وتكون
جة هذا التبادل هي ارتفاع في التكلفة الأحادية للنقل بمقدار وحدة نقدية واحدة،
التالي نرفض إدخال هذا الطريق.

م– نجرب طريق النقل $B_2 A_2$:

(B_3) يمكن أن تعطي لـ (A_2) عن طريق (A_3) ولكن (A_2) لا تستطيع أن تعوض نفس الكمية إلى (A_1)، لأن طريق النقل هذا غير مستعمل. لكن (B_2) يمكن أن تعطي لـ (A_2) 10 وحدات من عند (A_1) وتتحمل بالتالي تكلفة نقل بقدر 4 و.ن/للوحدة وتتخلى عن تكلفة 2 و.ن/للوحدة، و(A_2) تستطيع أن ترد (10 وحدات) لـ (A_1) عن طريق (B_1) وتتحمل بالتالي تكلفة (4 و.ن للوحدة) وتتخلى عن 3 و.ن للوحدة ولكن لا تستطيع أن تعطيها أي شيء عن طريق (B_1). والنتيجة هي زيادة التكاليف الأحادية بـ 3و.ن (+4 – 2 – 3 + 4 = + 3) فنرفض هذا الاقتراح.

ع– نجرب الطريق $B_3 A_3$:

(B_3) تعطي لـ (A_3) 10 وحدات من عند (A_1) ويتحمل مقابل ذلك (5 و.ن) ويتخلى عن دفع تكلفة بـ (4 و.ن). (B_3) لا يستطيع أن يعطي أي شيء لـ (A_3) من عند (A_2) لأن (A_3) لا يستطيع أن يعوض (A_2) بأي شيء. مجموع التكلفة الإضافية هنا = +1 (طريق مرفوض).

س– نجرب $B_1 A_3$:

(B_1) تعطي لـ (A_3) 20 وحدة من عند (A_2) ولكن (A_3) لا تستطيع أن تعوض لـ(A_2) لا عن طريق (B_3) ولا (B_2) (غير ممكن). فهذه الطريق تقنيا غير ممكن استعمالها.

نكون بهذا قد أنهينا **تجريب كل الطرق غير المستخدمة** وكلها لم تؤدي إلى تحسين هذا الحل الأخير المحصل عليه، أي لم تؤدي إلى تخفيض تكلفة النقل. فتكون التكلفة 190 و.ن. هي التكلفة الدنيا الممكن الوصول إليها وشبكة النقل

الأخيرة (ذات التكلفة 190) المحصل عليها هي الشبكة المثلى. وبذلك يصبح هذا هو الحل الأمثل للمسألة المعطاة.

أمثلة:

مثال 1:

ما هي تكلفة النقل الدنيا الممكن الوصول إليها وفق المعطيات التالية:

	B_1	B_2	B_3	
A_1	2	5	4	800
A_2	3	5	6	500
A_3	11	7	8	600
A_4	9	4	3	1300
	1600	900	700	3200 / 3200

الأرقام داخل المربع الداخلي هي تكاليف النقل الأحادية (C_{ij})، الأرقام خارجه فهي الكميات المعروضة من طرف المصادر والمطلوبة من طرف المستعملين، على أساس أن (B_3, B_2, B_1) هي المصادر الموجود فيها المنتج المراد نقله و(A_4,A_3,A_2,A_1) هم المستعملون الذين يريدون الحصول على المنتج المذكور، وأن مجموع الطلب والعرض متساويان.

الحل:

حل هذه المسألة يمر عبر مرحلتين:

- المرحلة الأولى هي إيجاد حل ابتدائي مقبول؛

- المرحلة الثانية هي البحث عن الحل الأمثل، أي إيجاد شبكة النقل الأرخص والتي تتطلب دفع أقل ما يمكن من تكاليف النقل.

البحث عن الحل الابتدائي:

سوف نبحث عن الحل الابتدائي باستعمال طريقة الزاوية الشمالية الغربية (MCNO)، والجدول التالي يعطي نتيجة هذا الحل.

	B_1	B_2	B_3			
A_1	2 / 800	5 / 0	4 / 0	800	0	
A_2	3 / 500	5 / 0	6 / 0	500	0	
A_3	11 / 300	7 / 300	8 / 0	600	300	0
A_4	9 / 0	4 / 600	3 / 700	1300	700	0
	1600	900	700	3200 / 3200		
	800	600	0			
	300	0				
	0					

عدد طرق النقل المستخدمة في الحل الابتدائي يساوي ستة (6) وهو يساوي العدد المطلوب حسب المقياس (n + m − 1) الذي يساوي (4 + 3 − 1 = 6)، فالحل الابتدائي إذن مقبول. التكلفة الكلية لشبكة النقل المحصل عليها في الحل الابتدائي

تساوي: (800×2 + 500×3 + 300×11 + 300×7 + 600×4 + 700×3) = 13000 و.ن.

البحث عن الحل الأمثل:

نستخدم طريقة التجريب في البحث عن الحل الأمثل وذلك بإدخال طرق النقل غير المستخدمة في الحل الابتدائي.

نجرب إدخال طريق النقل (A_1B_3):

إدخال هذا الطريق غير ممكن لأن إمكانيات التعويض غير ممكنة في حال إدخاله.

طريق النقل (A_1B_2):

يترتب على إدخال هذا الطريق تغير في تكاليف النقل الأحادية بمقدار 7 وحدات بالزيادة (‎-7 + 5 -3 +11 = +7‎)، فنرفض إذن إدخال هذا الطريق.

طريق النقل (A_2B_3):

إدخال هذا الطريق غير ممكن أيضا لأن إمكانيات التعويض غير ممكنة في حال إدخاله.

طريق النقل (A_2B_2):

يترتب على إدخال هذا الطريق زيادة في تكاليف النقل الأحادية بمقدار 6 وحدات (‎-7 + 5 -3 +11 = + 6‎). فيرفض أيضا هذا الطريق.

طريق النقل (A_3B_3):

إن إدخال هذا الطريق سيترتب عليه زيادة في تكلفة النقل الأحادية بمقدار 2 و.ن. (‎-3 +8 -7 +4 =2‎)، فلا فائدة من هذا الطريق.

طريق النقل (A_1B_4):

يترتب على إدخال هذا الطريق زيادة في تكاليف النقل الأحادية بمقدار 1 و.ن (-11 + 9 -4 +7 = + 1). فنرفض إدخال هذا الطريق أيضا. لقد جربنا كل طرق النقل غير المستخدمة ولم تؤدي إلى تخفيض تكلفة النقل، إذن فالحل الابتدائي غير قابل للتحسين ويكون الحل الأمثل هو نفسه الحل الابتدائي بتكلفة نقل كلية تساوي 13000 و.ن.

مثال 2:

أوجد أرخص شبكة نقل كلية ممكنة لحالة النقل الممثلة بالمعطيات التالية:

	B_1	B_2	B_3	
A_1	9	3	7	2
A_2	5	7	8	2
A_3	10	2	5	6
	3	3	4	10 / 10

البحث عن الحل الابتدائي:

سوف نستخدم طريقة الزاوية الشمالية الغربية (MCNO) في البحث عن الحل الابتدائي، والجدول التالي يعطي نتيجة هذا الحل.

	B_1	B_2	B_3			
A_1	2	0	0	2	0	
A2	1	1	0	2	1	0
A_3	0	2	4	6	4	0
	3	3	4	10 10		
	1	2	0			
	0	0				

يتكون الحل الابتدائي من عدد من طرق النقل يساوي خمسة (5) وهو يساوي العدد المطلوب حسب المقياس n +m–1 (3 + 3 – 1 = 5)، إذن فالحل الابتدائي مقبول. وتكلفة شبكة النقل المستخدمة في هذا الحل تساوي 54 و.ن.

البحث عن الحل الأمثل:

نبحث عن الحل الأمثل باستخدام طريقة التجريب.

نجرب طريق النقل غير المستخدم (A_1B_3):

إدخال هذا الطريق غير ممكن لأن إمكانيات التعويض غير متاحة في حال إدخاله.

طريق النقل (A_1B_2):

سوف يترتب على إدخال هذا الطريق انخفاض في تكاليف النقل الأحادية بمقدار 8 وحدات نقدية (‎-7 + 3 – 9 + 5 = – 8‎).

فتقبل إدخال هذا الطريق لأن إدخاله يساهم في تخفيض التكلفة الأحادية للنقل بمقدار 8 و.ن. وتصبح تكلفة النقل الجديدة هي: 54 – 8 = 46 و.ن.

شبكة النقل الجديدة بعد إدخال الطريق المشار إليه هي:

	B_1	B_2	B_3	
A_1	9 / 1	3 / 1	7 / 0	2
A_2	5 / 2	7 / 0	8 / 0	2
A_3	10 / 0	2 / 2	5 / 4	6
	3	3	4	

طريق النقل (A_2B_3):

إدخال هذا الطريق غير ممكن لأن إمكانيات التعويض غير متاحة في حال إدخاله.

طريق النقل (A_2B_2):

يؤدي إدخال هذا الطريق إلى زيادة في تكاليف النقل الأحادية بمقدار 8 و.ن ($-3 + 7 - 5 + 9 = +8$). فترفض إدخال هذا الطريق أيضا.

يساهم إدخال هذا الطريق في زيادة تكاليف النقل الأحادية بمقدار 2 و.ن ($-9 + 10 - 2 + 3 = +2$). فترفض إدخال هذا الطريق أيضا.

لقد جربنا كل طرق النقل غير المستخدمة ولم تساهم في تخفيض تكلفة النقل أكثر من المستوى الذي توصلنا إليه وهو 46 و.ن. لذلك نعتبر أن أدنى مستوى لتكاليف النقل يمكن أن نصل إليه هو 46 و.ن. وهذا هو الحل الأمثل. والشبكة المثلى للنقل هي الشبكة الأخيرة المتحصل عليها بعد إدخال طريق النقل (A_1B_2).

مثال 3:

أوجد تكلفة النقل الدنيا الممكن الوصول إليها وفق المعطيات التالية:

	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2	7	3	4	6
A_2	2	5	4	3	9
A_3	7	9	6	5	15
	7	5	8	10	30 / 30

البحث عن الحل الابتدائي:

نستخدم هنا أيضا طريقة الزاوية الشمالية الغربية (MCNO) في البحث عن الحل الابتدائي، والجدول التالي يعطي نتيجة هذا الحل.

	B_1	B_2	B_3	B_3				
A_1	6	0	0	0	6	0		
A_2	1	5	3	0	9	8	3	0
A_3	0	0	5	10	15	10	0	
	7	5	8	10	30 / 30			
	1	0	5					
	0		0					

يتكون الحل الابتدائي من عدد من طرق النقل يســاوي ســتة (6) وهو يساوي العدد المطلوب حسب المقياس $n + m - 1$ $(4 + 3 - 1 = 6)$، إذن فالحل الابتدائي مقبول. وتكلفة شبكة النقل المستخدمة في هذا الحل تساوي 131 و.ن.

البحث عن الحل الأمثل:

نبحث عن الحل الأمثل باستخدام طريقة التجريب.

نجرب طريق النقل غير المستخدم (A_1B_4):

إمكانيات التبادل لهذا الطريق للنقل والطرق الأخرى غير متوفرة وبالتالي فهذا الطريق غير ممكن إدخاله في شبكة النقل المتحصل عليها في الحل الابتدائي.

طريق النقل (A_1B_3):

يترتب على إدخال هذا الطريق للنقل انخفاض في تكاليف النقل الأحادية بمقدار وحدة واحدة أي $(+3 - 4 + 2 - 2 = -1)$ وذلك بتبادل a_1 و a_2 لكمية منقولة

مقدارها 3 وحدات. ويكون الانخفاض الكلي في تكلفة النقل الناتج عن إدخال هذا الطريق هو 3 و.ن وتصبح التكلفة الكلية للنقل للشبكة الجديدة للنقل هي: 131 - 3 = 128 و.ن، والشبكة الجديدة للنقل هي:

	B_1	B_2	B_3	B_4	
6	2 / 3	7 / 0	3 / 3	4 / 0	A_1
9	2 / 4	5 / 5	4 / 0	3 / 0	A_2
15	7 / 0	9 / 0	6 / 5	5 / 10	A_3
	7	5	8	10	

طريق النقل (A_1B_4):

يتسبب هذا الطريق في حالة إدخاله في زيادة تكاليف النقل الأحادية بمقدار 1 و.ن (-5 +4 -3 +6 = +1). فنرفض إدخال هذا الطريق.

طريق النقل (A_1B_2):

يتسبب هذا الطريق في حالة إدخاله في زيادة تكاليف النقل الأحادية بمقدار 2 و.ن (-5 +7 -2 +2 = +2). فنرفض إدخال هذا الطريق.

طريق النقل (A_2B_4):

لا يمكن إدخال هذا الطريق لأن إمكانيات التعويض غير متاحة.

طريق النقل (A_2B_3):

يترتب على إدخال هذا الطريق زيادة تكاليف النقل الأحادية بمقدار 1 و.ن ($-3+4-2+2=+1$). فنرفض إدخال هذا الطريق.

طريق النقل (A_3B_2):

لا يمكن إدخال هذا الطريق لأن إمكانيات التعويض غير متاحة.

طريق النقل (A_3B_1):

يتسبب هذا الطريق في حالة إدخاله في زيادة تكاليف النقل الأحادية بمقدار 2 وحدة نقدية ($-2+7-6+3=+2$). فنرفض إدخال هذا الطريق.

تم تجريب كل طرق النقل غير المستخدمة ولم تؤدي إلى تحسين الحل المحصل عليه سابقا، وبالتالي فالحل المحصل عليه بعد إدخال طريق النقل A_1B_3 يعتبر حلا أمثلا، بمعنى يمثل المستوى الأدنى للتكاليف الممكن الوصول إليه وهو (128 و.ن.).

3- البحث عن الحل الأمثل باستخدام طريقة التحويل:

هذه الطريقة تتكون من المراحل التالية:

أ- نكون أربع جداول ذات الأبعاد (mxn) بحيث n هو عدد الأعمدة التي نخصصها للمصادر وm عدد الصفوف التي نخصصها للمستعملين.

ب- نبدأ بالجدول الأول ونشطب (نضع علامة –) الخانات الفارغة: أي طرق النقل غير المستخدمة حسب الحل الابتدائي.

ت- ثم نأخذ الجداول الثلاثة المتبقية ونشطب (نضع علامة –) الخانات المملوءة، أي طرق النقل المستعملة حسب الحل الابتدائي.

ث- نضع في الجدول الأول والثالث التكاليف الأحادية للنقل (C_{ij}) في الخانات غير المشطوبة أي الخالية من علامة (–).

ج- نضيف إلى الجدول الأول سطرا وعمودا إضافيين (E_i) و (F_j) على التوالي، بحيث قيم (F_j)، (E_i) تحسب حسب العبارة التالية $C_{ij} = E_i + F_j$، مع إعطائنا في بداية العملية القيمة "صفر" لأي من (F_j) أو (E_i).

ح- نحول قيم (E_i) و(F_j) إلى الجدول الثاني ونحسب قيم التكاليف(C'_{ij}) للخانات الفارغة، أي الخالية من علامة (–) وذلك باستعمال العبارة: $C'_{ij} = E_i + F_j$.

خ- نحسب الفرق (Δ_{ij}) بين التكاليف الحقيقية (C_{ij}) الموجودة في الخانات الفارغة في الجدول الثالث والتكاليف (C'_{ij}) لنفس الخانات في الجدول الثاني.

أي : $\Delta_{ij} = C_{ij}(III) - C'ij(II)$ ، ثم ننقل قيم (Δ_{ij}) إلى الجدول الرابع ونضعها في الخانات الفارغة (غير المشطوبة).

د- إذا كانت كل قيم (Δ_{ij}) غير سالبة ($\Delta_{ij} \geq 0$) فإن الحل الابتدائي المحصل عليه يعتبر حلا أمثلا ولا توجد إمكانية لتحسينه. أما إذا كانت هناك بعض القيم لـ (Δ_{ij}) سالبة، فإن هذا يعني أن الحل الابتدائي ليس هو الحل الأمثل وأن هناك حلا أمثلا يجب البحث عليه. عملية البحث عن هذا الحل تتطلب أن الخانة (طريق النقل) التي تحتوي على أصغر قيمة سالبة لـ (Δ_{ij}) يجب أن تتلقى كمية من المنتج المراد نقله، التي **تحول** إليها من الخانات المجاورة لها وفق **دورة أو حلقة تحويل** (une boucle de transfert)، وذلك حسب القواعد التالية:

– التحويل يجب أن يتم حسب دورة (حلقة) مشكلة من **خط منكسر مغلق، رؤوسه هي زوايا قائمة**. كل خانة من خانات جدول النقل التي تشكل جزء من هذه الدورة وتساهم في عملية التحويل يجب أن تشكل زاوية لهذه الحلقة.

– التنقل داخل هذه الحلقة يجب أن يكون عموديا أو أفقيا فقط.

– نضع إشارات (–)، (+) على رؤوس هذه الحلقة، هذه الإشارات يجب أن تكون متناوبة عند رؤوس زوايا الحلقة. نبدأ وضع هذه الإشارات من طريق النقل الذي نريد أن نحول إليه (الذي نريد أن ندخله في شبكة النقل)، فنضع أمام هذا الطريق الإشارة (+) وهذا دلالة على أننا نريد أن نضيف إلى هذا الطريق كمية ما نحولها إليه من الخانات الأخرى التي تشكل حلقة التحويل.

– الخانات التي توجد أمامها إشارة (–) تعني أن هذه الخانات سوف نطرح منها، أما تلك التي توجد أمامها (+) فتعني أننا نضيف إليها.

– تبدأ عملية التحويل عبر هذه الحلقة من الخانة التي تحتوي على أقل كمية من بين الخانات التي توجد أمامها إشارة (–).

– إذا كانت الكمية الموجودة في الخانة، ذات الإشارة السالبة، التي تحتوي على أقل كمية هي على سبيل المثال (×)، فنقوم بطرح (×) من كل الخانات ذات الإشارات (–) وإضافتها إلى كل خانات الحلقة ذات الإشارة (+). بمعنى نبدأ عملية التحويل من الخانة ذات الكمية الأقل من بين الخانات ذات الإشارة السالبة، فنطرح منها الكمية الموجودة فيها ثم نضيفها إلى الخانة المجاورة لها على مسار التحويل، نطرح بعدها نفس هذه الكمية من الخانة الثالثة على مسار التحويل عبر الحلقة لنضيفها بعدها إلى الخانة الرابعة وهكذا حتى تنتهي الحلقة.

– إذا كانت الخانات ذات الإشارة السالبة تحتوي على عدة كميات صغيرة متساوية، فإن نقل إحدى هذه الكميات إلى طريق النقل الذي نريد ملأه سوف يترتب عليه انخفاض في عدد طرق النقل أقل من العدد المطلوب وفق المقياس (n+m-1)، وبالتالي يصبح الحل المحصل عليه غير مقبول.

- لذلك يجب إعادة رفع عدد طرق النقل المستخدمة إلى عدد مساوي لـ n+m-1 ، وذلك بملء عدد (n-1) من الخانات التي أصبحت فارغة بفعل المشكل المشار إليه، بكمية تساوي الصفر، والخانات التي يجب إعادة ملئها هي تلك التي تكون تكاليف نقلها هي الأصغر.

- كل رأس من رؤوس هذه الحلقة يجب أن يكون ناتجا عن التقاء خطين فقط من خطوط الحلقة: واحد أفقي والآخر عمودي، لهذا لا يجب أن يكون هناك ثلاث رؤوس متتالية على نفس الخط (الضلع) المشكل لهذه الحلقة، سواء كان عموديا أو أفقيا. بمعنى آخر كل خط في هذه الحلقة يجب أن يجمع رأسين فقط يكونا موجودين في نهايتيه.

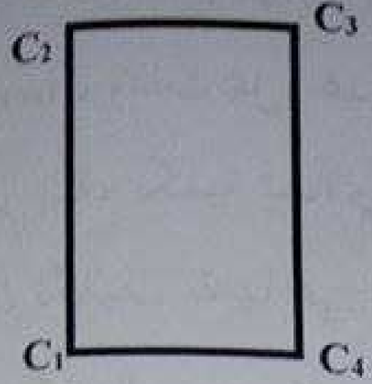
- الخطوط المشكلة لهذه الحلقة يمكن أن تقطع بعضها البعض ولكن نقاط التقاطع لا يمكن اعتبارها رؤوسا لهذه الحلقة.

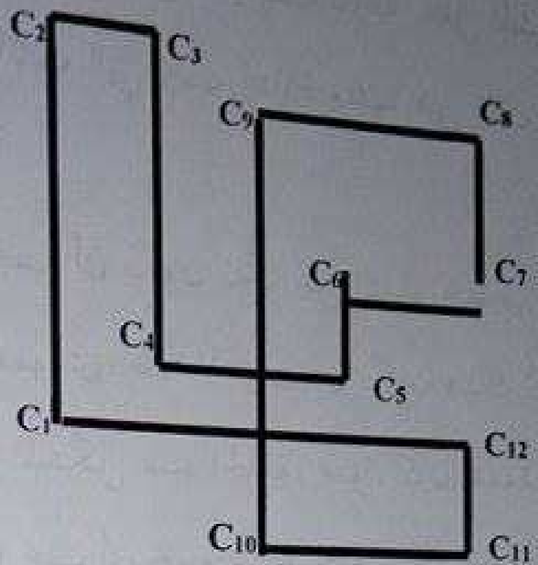
- الخانة الفارغة لا يمكن أن اعتبارها رأسا من رؤوس هذه الدورة ماعدا تلك التي نريد أن نملأها (أي نحول إليها).

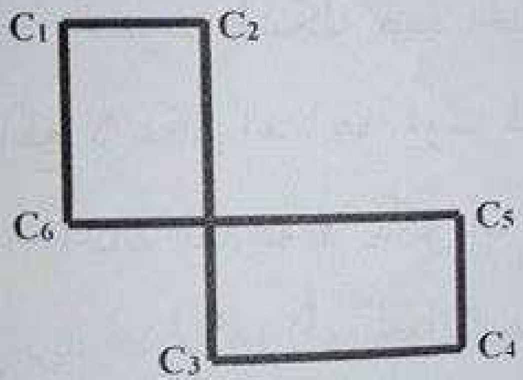
- في كل حلقة تحويل عدد الرؤوس يجب أن يكون دائما زوجيا.

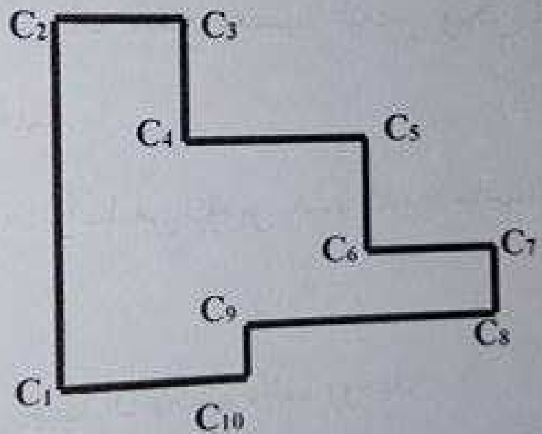
- في كل محاولة لتحسين الحل هناك دائما دورة تحويل واحدة صحيحة فقط.

فيما يلي نعطي بعض أشكال حلقات التحويل كما يمكن أن نجدها في بعض جداول حل مسألة النقل.









مثال 1:

نأخذ الآن الحل الابتدائي المتحصل عليه في المثال السابق ونبدأ في البحث عن حل أمثل حسب طريقة التحويل.

المحاولة الأولى:

ليكن الجدول الممثل لطرق النقل حسب الحل الابتدائي، وجدول تكاليف النقل الأحادية (C_{ij}).

3	2	4
1	4	3
4	2	5

20	5	
	30	
	15	20

الخطوة الأولى: نكون الجداول الأربعة ونشطب في الجدول الأول طرق النقل غير المستخدمة حسب الحل الابتدائي أي نضع فيها علامة (–)، ثم نأخذ الجداول الثلاثة المتبقية ونشطب فيها بالعكس طرق النقل المستخدمة حسب نفس الحل.

جدول -I-

		—
—		—
—		

جدول -II-

—	—	
	—	
	—	—

جدول -III-

—	—	
	—	
	—	—

جدول -IV-

—	—	
	—	
	—	—

الخطوة الثانية: نضع في الجدول الأول والثالث تكاليف النقل الأحادية (C_{ij}) في الخانات الفارغة (أي التي لا تحتوي على علامة الشطب –).

—	—	4
1	—	3
4	—	—

جدول -III-

قيم C_{ij} الأخرى

3	2	—
—	4	—
—	2	5

جدول -I-

قيم C_{ij} للحل الابتدائي

الخطوة 3: حساب قيم العمود الإضافي (E_i) والصف الإضافي (F_j) ووضعها في الجدول الأول. حساب هذه القيم نجريها حسب العلاقة التالية: $C_{ij} = E_i + F_j$. نضع على سبيل المثال (عشوائيا) $F_1=0$، ثم نجري الحساب. (يمكن إعطاء أي من قيم E_i أو F_j القيمة **صفر** حتى نتمكن من حساب قيم E_i و F_j الأخرى).

جدول -I-

قيم E_i و F_j

				E_i
	3	2	-	3
	-	4	-	5
	-	2	5	3
F_j	0	-1	2	

$C_{11} = E_1 + f_1$ $3 = E_1 + 0$ $E_1 = 3$	$C_{22} = E_2 + F_2$ $4 = E_2 - 1$ $E_2 = 5$
$C_{12} = E_1 + F_2$ $2 = 3 + F_2$ $F_2 = -1$	$C_{32} = E_3 + F_2$ $2 = E_3 - 1$ $E_3 = 3$
	$C_{33} = E_3 + F_3$ $5 = 3 + F_3$ $F_3 = 2$

الخطوة 4: نحسب الآن قيم (C'_{ij}) حسب العبارة $C'_{ij} = E_i + F_j$ ثم ننقل هذه القيم إلى الجدول الثاني.

$C'_{13} = E_1+F_3$ $= 3 + 2$ $= 5$	$C'_{31} = E_3+F_1$ $= 3 + 0$ $= 3$
$C'_{21} = E_2+F_1$ $= 5 + 0$ $= 5$	$C'_{23} = E_2+F_3$ $= 5 + 2$ $= 7$

جدول -II-
قيم C'_{ij}

				E_i
	-	-	5	3
	5	-	7	5
	3	-	-	3
F_j	0	-1	2	

الخطوة 5: نحسب قيم الفروقات (Δ_{ij}) وننقلها إلى الجدول رقم – IV –

$\Delta_{23} = C_{23} - C'_{23}$ $= 3 - 7$ $= - 4$	$\Delta_{13} = C_{13} - C'_{13}$ $= 4 - 5$ $= 1$
$\Delta_{21} = C_{21} - C'_{21}$ $= 1 - 5$ $= - 4$	$\Delta_{31} = C_{31} - C'_{31}$ $= 4 - 3$ $= 1$

جدول – IV -
قيم Δ_{ij}

-	-	- 1
- 4	-	- 4
1	-	-

لقد انتهينا الآن من تطبيق خطوات هذه الطريقة، ونلاحظ أن الجدول الرابع يحتوي على عدة قيم لـ (Δ_{ij}) سالبة، وبالتالي فالحل الابتدائي المتوصل إليه سابقا ليس حلا أمثلا، وعلينا إذن الاستمرار في البحث عن الحل الأمثل. هناك قيمتان سالبتان صغيرتان لـ (Δ_{ij}) في الجدول الرابع هما القيمتان (‎-4) لـ (Δ_{21}) و (Δ_{23}) فنختار عشوائيا (Δ_{23}). وهذا يعني أن التحويل يجب أن يتم إلى طريق النقل (A_2,B_3). نأخذ الجدول الممثل للكميات المنقولة حسب الحل الابتدائي ونجري التحويل إلى طريق النقل (A_2,B_3).

فانطلاقا من هذه الخانة وبمراعاة القواعد المشار إليها سابقا فإن حلقة التحويل تتكون من الخانات التالية: (3,3)، (3,2)، (2,2)، (2,3).

20	5	
	30 −	+
	15 +	− 20

الآن نبحث عن أقل كمية من بين الكميات الموجودة في الخانات ذات الإشارة السالبة وهما الخانتين (3,3)، (2,2). فنجد أن طريق النقل (3,3) يحتوي على أقل كمية منقولة وهي (20). نضيف إذن (20) إلى الخانة (3,2) فتصبح الكمية الموجودة فيها الآن 35، ونطرحها من الكمية الموجودة في الخانة (2,2) فيتبقى فيها 10 وفي الأخير نضيفها إلى الخانة (2,3) التي كانت فارغة أصلا فتصبح الكمية الموجودة فيها الآن 20. وتصبح تكلفة شبكة النقل الجديدة (بعد المحاولة الأولى)

التكلفة الكلية للشبكة السابقة مطروحا منها تكلفة الكمية المحولة الجديدة إلى

طريق النقل (a_2 ,b_3). أي: 320 و.ن - 4 .20 = 240 و.ن.

شبكة النقل الجديدة بعد المحاولة الأولى هي:

20	5	
	10	20
	35	

هل وصلنا إلى الحل الأمثل أم لا؟ بمعنى هل هذا هو أدنى مستوى لتكلفة النقل الذي يمكن أن نصل إليه؟ لا نستطيع الإجابة على هذا السؤال الآن، ومن أجل معرفة ذلك يجب إجراء المحاولة الثانية والنظر إلى جدولها الرابع، فإذا كان لا يحتوي على القيم السالبة فهذا مؤشر على أن مستوى التكاليف الذي توصلنا إليه الآن بعد المحاولة الأولى يمثل حلا أمثلا وإذا كان العكس فيجب مواصلة محاولة البحث عن الحل الأمثل.

نجري إذن محاولة ثانية وذلك بإعادة إجراء نفس العمليات السابقة لهذه الطريقة على جدول النقل الجديد المحصل عليه بعد المحاولة الأولى.

المحاولة الثانية:

لدينا شبكة النقل المحصل عليها بعد المحاولة الأولى، نجري محاولة جديدة للبحث عن شبكة نقل جديدة تسمح لنا بتخفيض التكلفة الكلية للنقل إلى مستوى أدنى من المستوى الحالي.

نكون الجداول الأربعة الضرورية للحل حسب المراحل المشار إليها سابقا.

جدول -I-

				E_i
	3	2	-	3
	-	4	3	5
	-	2	-	3
F_j	0	-1	-2	

جدول -II-

				E_i
	-	-	1	3
	5	-	-	5
	3	-	1	3
F_j	0	-1	-2	

جدول -III-

-	-	4
1	-	-
4	-	5

جدول -IV-

-	-	3
-4	-	-
1	-	4

بعد هذه المحاولة نلاحظ أن الجدول الرابع لا زال يحتوي على قيمة سالبة، وهي قيمة (Δ_{21} = -4) وهذا يدل على أنه بالرغم من تحسين الحل وتخفيض تكلفة النقل من 320 و.ن. إلى 240 في المحاولة السابقة لكننا لا زلنا لم نصل إلى الحل الأمثل. فنستمر في البحث عن حل أمثل، وذلك بإدخال طريق النقل (a_2 ,b_1) إلى شبكة النقل السابقة وتحويل كمية ما إليه من طرق النقل المجاورة باستخدام دورة تحويل التي تمكننا من التحويل إلى الخانة (i = 2 , j = 1).

نرجع إلى شبكة النقل المحصل عليها بعد المحاولة الأولى ونحاول أن نكون فيها حلقة تحويل تمكننا من ملء طريق النقل الجديد الذي نريد إدخاله إلى هذه الشبكة. انطلاقا من طريق النقل الجديد الذي نريد إدخاله (a_2 ,b_1) وبمراعاة القواعد المشار

إليها سابقا فإن حلقة التحويل تتكون من الخانات التالية: (2, 1) (2, 1)، (2, 2)، (1, 1).

20 −	+ 5	
+	−10	20
	35	

نبحث الآن عن أقل كمية من بين الكميات الموجودة في الخانات ذات الإشارة السالبة وهما الخانتين (1, 1)، (2, 2). فنجد أن طريق النقل (2, 2) هو الذي يحتوي على أقل كمية منقولة وهي (10). نضيف إذن (10) إلى الخانة (2, 1) فتصبح الكمية الموجودة فيها الآن 15، ونطرحها من الكمية الموجودة في الخانة (1,1) فيتبقى فيها 10 وفي الأخير نضيفها إلى الخانة (1, 2) التي كانت أصلا فارغة فتصبح الكمية الموجودة فيها الآن 10 ونستغني عن طريق النقل (a_2,b_2) الذي يحل محله الطريق الجديد (a_2,b_1). وتصبح تكلفة شبكة النقل الجديدة (بعد المحاولة الثانية) هي: التكلفة الكلية للشبكة السابقة مطروحا منها تكلفة الكمية المحولة الجديدة إلى طريق النقل (a_2 ,b_1). أي: 240 و.ن - 4 .10 = 200 و.ن.

شبكة النقل الجديدة بعد المحاولة الثانية هي:

10	15	
10	×	20
	35	

نجري محاولة ثالثة من أجل تحديد هل النتيجة التي توصلنا إليها بعد المحاولة الثانية تمثل حلا أمثلا أم لا.

المحاولة الثالثة:

نكون الجداول الأربعة الضرورية لإجراء هذه المحاولة وذلك بالاعتماد على معطيات شبكة النقل المحصل عليها بعد المحاولة الثانية.

جدول -I-

				E_i
	3	2	-	3
	1	-	3	1
	-	2	-	3
F_j	0	-1	2	

جدول -II-

				E_i
	-	-	5	3
	-	0	-	1
	3	-	5	3
F_j	0	-1	2	

-	-	4
1	4	-
4	-	5

جدول -III-

-	-	-1
-	4	-
1	-	0

جدول -IV-

نلاحظ أن الجدول الرابع لا زال يحتوي على قيمة سالبة، وهي قيمة ($\Delta_{13} = -1$) وهذا يدل هنا أيضا على أنه بالرغم من تحسين الحل وتخفيض تكلفة النقل من 240 و.ن. إلى 200 لكننا لا زلنا لم نصل إلى الحل الأمثل. فنستمر في البحث عن حل أمثل، وذلك بإدخال طريق النقل (a_1 ,b_3) إلى شبكة النقل السابقة وتحويل كمية ما إليه من طرق النقل المجاورة له باستخدام دورة التحويل التي تمكننا من تحويل كمية ما إلى الخانة ($i = 1, j = 3$). انطلاقا من طريق النقل الجديد الذي نريد إدخاله (a_1, b_3) وبمراعاة القواعد المشار إليها سابقا فإن حلقة التحويل تتكون من الخانات التالية: (1,1) ، (1,3) ، (2,1) ، (2,3).

10 -	15	+
10 +	$\boxed{}$	- 20
	35	

ند الآن أقل كمية من بين الكميات الموجودة في الخانات ذات الإشارة السالبة
ما الخانتين (1, 1)، (3, 3)، وطريق النقل (1, 1) هو الذي يحتوي على أقل كمية
حولة وهي (10). نضيف إذن (10) إلى الخانة (1, 2) فتصبح الكمية الموجودة فيها
لآن 20، ونطرحها من الكمية 20 الموجودة في الخانة (3, 2) فيتبقى فيها 10 ثم
ضع هذه الكمية في الخانة. والنتيجة هي أننا حولنا الكمية 10 من طريق النقل
(a_1, b)، الذي يصبح غير مستعمل الآن، إلى طريق النقل (a_2, b_1) الذي يحل
له.

وتصبح تكلفة شبكة النقل الجديدة (بعد المحاولة الثالثة) هي: التكلفة الكلية
شبكة السابقة مطروحا منها تكلفة الكمية المحولة الجديدة إلى طريق النقل (a_1
b)، أي: 200 و.ن - 1 .10 = 190و.ن.

كة النقل الجديدة بعد المحاولة الثالثة هي:

	15	10
20		10
	35	

المحاولة الرابعة:

تكون الجداول الأربعة التي تسمح لنا بإجراء المحاولة الرابعة وذلك بالاعتماد على معطيات شبكة النقل المحصل عليها بعد المحاولة الثالثة.

جدول -I-

				E_i
	-	2	4	2
	1	-	3	1
	-	2	-	2
F_j	0	0	2	

جدول -II-

				E_i
	2	-	-	2
	-	1	-	1
	2	-	4	2
F_j	0	0	2	

3	-	-
-	4	-
4	-	5

جدول -III-

1	-	-
-	3	-
2	-	1

جدول -IV-

لقد اختفت القيم السالبة الآن من الجدول الرابع، وهذا يدل على أن الحل المتحصل عليه بعد المحاولة الثالثة هو حلا أمثلا لهذه المسألة. شبكة النقل الأرخص التي تسمح بنقل المنتج بأقل تكلفة كلية ممكنة هي الشبكة المحصل عليها بعد المحاولة الثالثة.

للتأكد من قيمة هذه التكلفة يمكن جمع قيم تكاليف النقل حسب هذه الشبكة كالتالي:

$$Min\ Z = 15.2 + 10.4 + 20p10.3 + 35.2 = 190$$

وهي نفس قيمة التكلفة الدنيا التي تحصلنا عليها عندما استخدمنا طريقة التجريب.

مثال 2:

مؤسسة إنتاجية ما تزود أربع زبائن لها بالمنتج الذي يتم إنتاجه في 6 وحدات إنتاجية، الكميات القصوى من الإنتاج التي تستطيع الوحدات الإنتاجية توفيرها، الطلب الأقصى للزبائن وكذلك التكلفة الأحادية لنقل هذا المنتج من الوحدات الإنتاجية إلى الزبائن معطاة بالجدول التالي:

طلب الزبائن							
600	22	30	18	4	12	8	
450	16	24	28	14	6	18	
750	26	8	24	12	4	16	
650	10	6	16	4	22	28	
2450 / 2450	550	300	450	250	400	500	عرض الوحدات الإنتاجية

المطلوب:

البحث عن شبكة النقل الأرخص التي تسمح للمؤسسة المذكورة من نقل المنتج إلى زبائنها بأقل تكلفة كلية ممكنة.

الحل :

1- إيجاد الحل الابتدائي باستعمال طريقة ز.ش.غ.

نبدأ في إشباع طلب الزبائن ابتداءا من الزاوية الشمالية الغربية وننتهي بالزاوي

السفلى الشرقية. فنحصل على الطرق التالية المستخدمة لنقل المنتج (طرق النقل

المشكلة للحل الابتدائي).

500	100					~~600~~	~~100~~	0	
	300	150				~~450~~	~~150~~	0	
		100	450	200		~~750~~	~~650~~	~~200~~	0
				100	550	~~650~~	~~550~~	0	
~~500~~	~~400~~	~~250~~	~~450~~	~~300~~	~~550~~				
0	~~300~~	~~100~~	0	~~100~~	0				
	0	0		0					

عدد الطرق المستعملة في هذا الحل الابتدائي تساوي 9 ومن أجل قبول هذ

الحل يجب أن يكون هذا العدد ساويا للمقياس (m + n - 1)، أي: = 1 - 6 + 4

9، إذن فهذا الحل الابتدائي مقبول، وتكلفته الكلية هي:

$$Z = 14 \,.\, 150 + 300 \,.\, 6 + 12 \,.\, 100 + 8 \,.\, 500 + 8 \,.\, 200 + 24 \,.\, 450$$
$$+ 12 \,.\, 100 + 6 \,.\, 100 + 550 \,.\, 10 = 28800$$

2- تحسين الحل الابتدائي والبحث عن حل أمثل (باستعمال طريقة التحويل):

بالاعتماد على الحل الابتدائي المقبول نبدأ في البحث عن حل أمثل حسب

هذه الطريقة.

المحاولة الأولى:

لدينا جدول الكميات المنقولة حسب الحل الابتدائي وجدول تكاليف النقل الأحادية (C_{ij}).

500	100				
	300	150			
		100	450	200	
				100	550

8	12	4	18	30	22
18	6	14	28	24	16
16	4	12	24	8	26
28	22	4	16	6	10

تشكيل الجداول الأول والثالث المطلوبين بعد حساب قيم E_i, F_j، مع افتراض أن $F_1 = 0$ عشوائيا.

$C_{11}=E_1+E_2$ $8 = E_1+0$ $E_1=8$	$C_{22}=E_2+F_2$ $6= E_2+4$ $E_2=2$	$C_{33}= E_3+F_3$ $12= E_3+12$ $E_3= 0$	$C_{35}= E_3+F_5$ $8= 0+F_5$ $F_5= 8$
$C_{12}= E_1+F_2$ $12= 8+F_2$ $F_2= 4$	$C_{23}\ E_2+F_3$ $14= 2+F_3$ $F_3= 12$	$C_{34} =E_3+F_4$ $24= 0+F_4$ $F_4 =24$	$C_{45}= E_4+F_5$ $6= E_4+8$ $E_4= 8$ $C_{46}= E_4+F_6$ $10= -2+F_6$ $F_6= 12$

نضيف الآن قيم E_i , F_j المحصل عليها إلى الجدول الأول.

						E_i
8	12	–	–	–	–	8
–	6	14	–	–	–	2
–	–	12	24	8	–	0
–	–	–	–	6	10	-2
F_j: 0	4	12	24	8	12	

جدول - I -

قيم F_j , E_i

نحسب الآن قيم C'_{ij} حسب العبارة $C'_{ij} = E_i + F_j$ ونشكل الجدول -II-

$C'_{21} = E_2+F_1$ $= 2+0$ $= 2$	$C'_{13} = E_1+F_3$ $= 8+12$ $= 20$	$C'_{24} = E_2+F_4$ $= 2+24$ $= 26$	$C'_{14} = E_1+F_4$ $= 8+24$ $= 32$
$C'_{26} = E_2+F_6$ $= 2+12$ $= 14$	$C'_{16} = E_1+F_6$ $= 8+12$ $= 20$	$C'_{25} = E_2+F_5$ $= 2+8$ $= 10$	$C'_{15} = E_1+F_5$ $= 8+8$ $= 16$

–	–	20	32	16	20	8
2	–	–	26	10	14	2
0	4	–	–	–	12	0
-2	2	10	22	–	–	-2
F_j: 0	4	12	24	8	12	

جدول – II -

قيم C'ij

نحسب الآن قيم الفروقات (Δ_{ij}) وننقلها إلى الجدول -IV-

$\Delta_{21} = C_{21} - C'_{21} = 18 - 2 = 16$	$\Delta_{15} = C_{15} - C'_{15} = 30 - 16 = 14$	$\Delta_{13} = C_{13} - C'_{13} = 4 - 20 = -16$	$\Delta_{25} = C_{25} - C'_{25} = 24 - 10 = 14$
$\Delta_{24} = C_{24} - C'_{24} = 28 - 26 = 2$	$\Delta_{16} = C_{16} - C'_{16} = 22 - 20 = 2$	$\Delta_{14} = C_{14} - C'_{14} = 18 - 32 = -14$	$\Delta_{26} = C_{26} - C'_{26} = 16 - 14 = 2$

وهكذا نحسب بقية (Δ_{ij})، ويكون الجدول الرابع كالتالي:

—	—	-16	-14	14	2
16	—	—	2	14	2
16	0	—	—	—	14
30	20	-6	-6	—	—

جدول – IV –

قيم (Δ_{ij})

إن الجدول الرابع يحتوي على عدة قيم سالبة وبالتالي فالحل الابتدائي المتوصل إليه يعتبر حلا غير أمثل، ويتعين بالتالي الاستمرار في البحث عن حل أمثل. نلاحظ أن أصغر قيمة سالبة من ضمن قيم (Δ_{ij}) في الجدول الرابع هي قيمة $\Delta_{13} = -16$.

فنأخذ الشبكة الممثلة للكميات المنقولة حسب الحل الابتدائي ونجري التحويل إلى الخانة ($i = 1, j = 3$).

500	100 –	+			
	+ 300	–150			
		100	450	200	
				100	550

فنحصل على الشبكة التالية:

500		100			
	400	50			
		100	450	200	
				100	550

وتصبح تكلفة الحل الجديد (بعد المحاولة الأولى) هي:

$28800 - 16 \cdot 100 = 27200$ و. ن.

المحاولة الثانية:

							E_i
	8	–	4	–	–	–	8
	–	6	14	–	–	–	18
	–	–	12	24	8	–	16
	–	–	–	–	6	10	14
F_j	0	–12	–4	8	–8	–4	

جدول - I -

–	12	–	18	30	22
18	–	–	28	24	16
16	4	–	–	–	26
28	22	4	16	–	–

جدول - III -

							E_i
	–	–4	–	16	0	4	8
	18	–	–	26	10	14	18
	16	4	–	–	–	12	16
	14	2	10	22	–	–	14
F_j	0	–12	–4	8	–8	–4	

جدول - II -

–	16	–	2	30	18
0	–	–	2	14	2
0	0	–	–	–	14
14	20	–6	–6	–	–

جدول - IV -

بملاحظتنا للجدول الرابع نجد أن الحل السابق المتضمن في المحاولة الأولى لا يشكل حلا أمثلا نظرا لوجود قيم سالبة لـ Δ_{ij} في هذا الجدول، فنستمر إذن في البحث عن الحل الأمثل. هناك قيمتان سالبتان متساويتان لـ Δ_{ij} في الجدول الرابع $(\Delta_{43} = -6 \,,\, \Delta_{44} = -6)$، فنختار على سبيل المثال (Δ_{44}) على أنها أصغر قيمة ونجري التحويل إلى الخانة $(i = 4 \; j = 4)$.

500		100			
	400	50			
		100	450 −	+ 200	
			+	− 100	550

ونحصل بعدها على شبكة النقل التالية:

500		100			
	400	50			
		100	350	300	
			100		550

وتصبح تكلفة الحل الجديد، بعد المحاولة II هي:

$$27200 - 6 \cdot 100 = 26600$$ و.ن.

المحاولة الثالثة:

500		100			
	400	50			
		100	350	300	
			100		550

شبكة النقل السابقة

						E_i
8	-	4	-	-	-	8
-	6	14	-	-	-	18
-	-	12	24	8	-	16
-	-	-	16	-	10	8
F_j 0	-12	-4	8	-8	2	

جدول - I -

						E_i
-	-4	-	16	0	10	8
18	-	-	26	10	20	18
16	4	-	-	-	18	14
8	-4	4	-	0	-	8
F_j 0	-12	-4	8	-8	2	

جدول - II -

-	12	-	18	30	22
18	-	-	28	24	16
16	4	-	-	-	26
28	22	4	-	6	-

جدول - III -

-	16	-	2	30	12
0	-	-	2	14	-4
0	0	-	-	-	8
20	26	0	-	6	-

جدول IV -

نلاحظ أنه مازالت هناك قيمة سالبة في الجدول الرابع وهي ($\Delta_{26}=-4$).

فالحل السابق لا يشكل إذن حلا أمثلا، ونستمر في البحث عن حل أمثل، نجري التحويل إلى الخانة (i = 2 , j = 6)، ونحصل على شبكة نقل جديدة كالتالي:

500		100			
	400	50-			+
		100+	350-	300	
			+100		-550

500		100			
	400				50
		150	300	300	
			150		500

والتكلفة الكلية الجديدة تصبح: 26600 – 50.4 = 26400 و.ن.

المحاولة الرابعة:

						E_i
8	-	4	-	-	-	8
-	6	-	-	-	16	14
-	-	12	24	8	-	16
-	-	-	16	-	10	8
F_j: 0	-8	-4	8	-8	2	

جدول - I -

-	12	-	18	30	22
18	-	14	28	24	-
16	4	-	-	-	26
28	22	4	-	6	-

جدول - III -

						E_i
–	0	–	16	0	10	8
14	–	10	22	6	–	14
16	8	–	–	–	18	16
8	0	4	–	0	–	8
F_j: 0	-8	-4	8	-8	2	

جدول - II -

–	12	–	2	30	12
4	–	4	6	18	–
0	– 4	–	–	–	8
20	22	0	–	6	–

جدول - IV -

لازلنا لم نصل إلى الحل الأمثل نظرا لأنه لازالت هناك قيمة سالبة في الجدول الرابع وهي قيمة ($\Delta_{32}=-4$) فنستمر في البحث عن الحل الأمثل.

نجري التحويل إلى الخانة ($i = 3$, $j = 2$)، فنحصل على الشبكة التالية:

500		100			
	400-				+50
	+	150	- 300	300	
			+ 150		- 500

500		100			
	100				350
	300	150		300	
			450		200

والتكلفة الكلية الجديدة تساوي 26400 – 4 . 300 = 25200 و.ن.

المحاولة الخامسة:

جدول - I -

							E_i
	8	–	4	–	–	–	8
	–	6	–	–	–	16	18
	–	4	12	–	8	–	16
	–	–	–	16	–	10	12
F_j	0	–12	4–	4	–8	2–	

جدول - III -

–	12	–	18	30	22
18	–	14	28	24	–
16	–	–	24	–	26
28	22	4	–	6	–

جدول - II -

							E_i
	–	4–	–	12	0	6	8
	18	–	14	22	10	–	18
	16	–	–	20	–	14	16
	12	0	8	–	4	–	12
F_j	0	–12	4–	4	–8	2–	

جدول - IV -

–	16	–	6	30	16
0	–	0	6	14	–
0	–	–	4	–	12
16	22	–4	–	2	–

مازال هناك قيمة سالبة في الجدول الرابع وهي ($\Delta_{43} = -4$) ، وبالتالي فالحل الناتج عن المحاولة الرابعة لا يشكل حلا أمثلا. فنستمر في البحث ونجري الآن التحويل إلى الخانة ($i = 4$, $j = 3$).

500		100			
	100 -				+350
	+ 300	- 150		300	
		+	450		- 200

500		100			
					450
	400	50		300	
		100	450		100

وتصبح التكلفة الكلية الجديدة هي: 25200 – 4 . 100 = 24800 و.ن

المحاولة السادسة:

جدول - I -

						E_i
8	-	4	-	-	-	8
-	-	-	-	-	16	14
-	4	12	-	8	-	16
-	-	4	16	-	10	8
F_j	0	12-	4-	8	-8	2

جدول - III -

-	12	-	18	30	22
18	6	14	28	24	-
16	-	-	24	-	26
28	22	-	-	6	-

						E_i
-	-4	-	16	0	10	8
14	2	10	22	6	-	14
16	-	-	24	-	18	16
8	-4	-	-	0	-	8
F_j	0	12-	4-	8	-8	2

جدول - II -

-	16	-	2	30	12
4	4	4	6	18	-
0	-	-	0	-	8
20	18	-	-	6	-

جدول - IV -

الآن اختفت القيم السالبة من الجدول الرابع وهذا يدل على أن الحل المتحصل عليه بعد المحاولة الخامسة يشكل حلاً أمثلاً لهذه المسألة، بتكلفة نقل كلية = 24800 أي:

$Z = 500 \cdot 8 + 100 \cdot 4 + 450 \cdot 16 + 400 \cdot 4 + 50 \cdot 12 + 300 \cdot 8 + 100 \cdot 4 + 450 \cdot 16 + 100 \cdot 10 =$ 24800 و.ن

مثال 3:

المطلوب حل مسألة النقل التالية وفق المعطيات الواردة في الجدول أدناه:

1	4	0	4
2	3	2	6
3	2	2	8
4	0	1	6
6	8	10	24 / 24

الحل الابتدائي: نبحث عن الحل الابتدائي باستخدام طريقة الزاوية ش. غ. فنحصل على الشبكة التالية:

4			0
2	4		0
	4	4	0
		6	
0	0	0	

عدد طرق النقل المستخدمة في هذا الحل يساوي 6 وهو نفس العدد المطلوب وفق المقياس **n+m–1**، فالحل الابتدائي **مقبول**، تكلفة شبكة النقل لهذا الحل الابتدائي تساوي 42 و.ن.

يمكن البحث عن الحل الأمثل باستعمال أي من الطرق المشار إليها سابقا.

إيجاد الحل الأمثل باستعمال طريقة التحويل:

نستعمل طريقة التحويل للبحث عن الحل الأمثل.

المحاولة I:

جدول –C_{ij}–

1	4	0
2	3	2
3	2	2
4	0	1

جدول الحل الابتدائي

4		
2	4	
	4	4
		6

جدول – I –

				E_i
	1	–	–	1
	2	3	–	2
	–	2	2	1
	–	–	1	0
F_j	0	1	1	

جدول – III –

–	4	0
–	–	2
3	–	–
4	0	–

جدول - II -

			E_i
–	2	2	1
–	–	3	2
1	–	–	1
0	1	–	0
F_j: 0	1	1	

جدول - IV -

–	2	2–
–	–	1–
2	–	–
4	1–	–

يظهر في الجدول الرابع عدة قيم سالبة وبالتالي فالحل الابتدائي السابق لا تبر حلا أمثلا، ويجب مواصلة الحل بإدخال طريق النقل (A_1,B_3) إلى شبكة النقل كوين دورة تحويل لمئه بكمية منقولة من طرق النقل المستخدمة حاليا.

4 -		+
2 +	-	
	4	
	4 +	- 4
		6

نظرا لأن الكميات الموجودة في طرق النقل ذات الإشارة السالبة هي كلها ساوية، فإن محاولة ملء طريق النقل (A_1,B_3) بإحدى هذه الكميات يترتب عليها نفاض عدد طرق النقل المستعملة إلى أربعة فقط وهو عدد لا يساوي n+m-1 ي يتطلب ستة طرق.

لذلك لا يمكن قبول الحل المحصل عليه ويجب أولا إعادة مستوى عدد طرق قل إلى العدد المطلوب (6). نتفحص الخانات الثلاثة التي أصبحت فارغة وهي $(A_1,B$، (A_2,B_2)، (A_3,B_3) ونختار منهم خانتين ذات تكلفة النقل الأصغر ونحتفظ ما في شبكة النقل بكميات منقولة تساوي **صفر**، هاتين الخانتين هما (A_1,B_1) $(A_3,B_3$.

أما الخانة الأخرى (A_3,B_3)، فننقل الكمية الموجودة فيها إلى طريق النقل (A_1,B_3). نحصل بعد ذلك على شبكة النقل التالية:

0		4
6		
	8	0
		6

وتصبح تكلفة النقل لهذه الشبكة الجديدة = $42 - 2 \times 4 = 34$و.ن.

المحاولة II:

جدول الحل السابق.

0		4
6		
	8	0
		6

جدول $-C_{ij}-$

1	4	0
2	3	2
3	2	2
4	0	1

جدول - I -

				E_i
	1	–	0	0
	2	–	–	2
	–	2	2	2
	–	–	1	1
F_j	0	0	0	

جدول - III -

–	4	–
–	3	2
3	–	–
4	0	–

جدول - II -

				E_i
	-	0	-	0
	-	2	2	2
	2	-	-	2
	1	1	-	1
F_j	0	0	0	

جدول - IV -

-	4	-
-	1	0
1	-	-
3	1-	-

يظهر في الجدول الرابع قيمة سالبة واحدة وبالتالي فالحل السابق لا يعتبر حلا أمثلا، ويجب مواصلة الحل بإدخال طريق النقل (A_4,B_2) إلى شبكة النقل وتكوين دورة تحويل لملئه بكمية منقولة من طرق النقل المستخدمة حاليا. شكل دورة التحويل هو كالتالي:

0		4
6		
	8-	+ 0
	+	- 6

نحصل بعد التحويل على شبكة النقل التالية بتكلفة كلية تساوي

$34 - 1\times0 = 28$ و.ن.

0		4
6		
	2	6
	6	

المحاولة III:

جدول –C_{ij}–

1	4	0
2	3	2
3	2	2
4	0	1

جدول الحل السابق

0		4
6		
	2	6
	6	

جدول - I -

				E_i
	1	–	0	1
	2	–	–	2
	–	2	2	3
	–	–	1	1
F_j	0	1–	1–	

جدول - III -

–	4	–
–	3	2
3	–	–
4	–	1

				E_i
	–	0	–	1
	–	1	1	2
	3	–	–	3
	1	–	0	1
F_j	0	1–	1–	

جدول - II -

–	4	–
–	2	1
0	–	–
3	–	1

جدول - IV -

أصبح الجدول الرابع خاليا من القيم السالبة وبالتالي فالحل المحصل عليه في المحاولة السابقة يعتبر حلا أمثلا و يساوي 28 و.ن.

المبحث الثاني

حل مسألة النقل باستعمال طريقة التكاليف الصغرى

Méthode des moindres couts

هذه الطريقة تستعمل في إيجاد المرحلة الأولى من الحل وهو الحل الابتدائي، وعادة ما تعطي حلا ابتدائيا قريبا جدا من الحل الأمثل.

في هذه الطريقة، اختيار الخانة التي نبدأ بها الحل يتم عن طريق قيم تكاليف النقل الوحدوية (C_{ij})، حيث نقوم بتقسيم خانات جدول النقل إلى نصفين، ثم نأخذ جدول التكاليف الأحادية لنقل المنتج (C_{ij})، وعوض ما نذهب في كل مرة إلى الخانة أو الزاوية الشمالية الغربية -كما في الطريقة السابقة- نختار دائما الخانة ذات تكلفة النقل الأصغر ونملؤها، وذلك بوضع تكلفة نقل الوحدة في الزاوية العليا إلى اليمين من هذه الخانة والكمية المنقولة من المنتج (X_{ij})، التي من المفروض أن يتم نقلها عبر الطريق المختار، في الزاوية السفلى إلى اليسار من الخانة.

الكمية المنقولة (X_{ij}) التي نضعها في طريق النقل المختار تساوي أصغر الكميتين (a_i) أو (b_j) المقابلتين لهذه الخانة المختارة في الجدول السابق، أي أقل كمية مقابلة لها في عمود أو سطر الاحتياجات والكميات المتوفرة. يعني:

$X_{ij} = \min (a_i , b_j)$، ونستمر هكذا ....

نتعرض لهذه الطريقة عبر نفس المثالين السابقين اللذين تناولناهما في المباحث السابقة.

نبدأ بالمثال الأول السابق.

	B_1	B_2	B_3	
25	3	2	4	A_1
30	1	4	3	A_2
35	4	2	5	A_3
	20	50	20	

الخانة التي تحتوي على أقل تكلفة أحادية هي ($C_{21} = 1$)، فنضع فيها أقل كمية مقابلة لها في عمود وسطر الاحتياجات والكميات المتوفرة، أي: $X_{21} = \min(a_2 , b_1)$، يبقى في الصف المقابل لهذه الخانة كمية مقدارها 10 وحدات وفي العمود المقابل كمية تساوي الصفر.

القيمة الصغيرة الآن من ضمن قيم التكاليف الأحادية في الجدول موجودة في الخانتين ($C_{12} = 2$) و($C_{32} = 2$) وهما قيمتان متساويتان، فنأخذ عشوائيا مثلا الخانة (C_{32}): الكميات المقابلة لها هي ($a_3 = 35$) و($b_2 = 50$) وأصغرهما هي $a_3 = 35$ فنضعها في الخانة المختارة (C_{32}). فينتج الجدول التالي:

	B_1	B_2	B_3	
A_1	3	2	4	25
A_2	1 20	4	3	10
A_3	4	2	5	35
	0	50	20	

ثم نتبع نفس الطريقة فنحصل على الجداول التالية:

	b_1	b_2	b_3	
a_1	3	2	4	25
a_2	1 20	4	3	10
a_3	4	2 35	5	0
	0	15	20	

	b_1	b_2	b_3	
a_1	3	2 15	4	10
a_2	1 20	4	3	10
a_3	4	2 35	5	0
	0	0	20	

	b_1	b_2	b_3	
a_1	3	2 15	4	10
a_2	1 20	4	3 10	0
a_3	4	2 35	5	0
	0	0	10	

	b_1	b_2	b_3	
a_1	3	2 15	4 10	0
a_2	1 20	4	3 10	0
a_3	4	2 35	5	0
	0	0	0	

شبكة النقل والكميات المنقولة في الحل الابتدائي حسب هذه الطريقة هي:

$$X_{11} = 0 \ ,X_{12} = 15 \ ,X_{13} = 10$$
$$X_{21} = 20 \ ,X_{22} = 0 \ ,X_{23} = 10$$
$$X_{31} = 0 \ ,X_{32} = 35 \ ,X_{33} = 0$$

وتكون تكلفة النقل الكلية للحل الابتدائي هي:

$(2 \,.\, 15 + 4 \,.\, 10)/a_1 + (1 \,.\, 20 + 3 \,.\, 10)/a_2 + (2 \,.\, 35)/a_3 = 190$ و.ن

نختبر الآن هل هذا الحل مقبول أم لا: نلاحظ أن عدد الطرق النقل المستعملة فيه تساوي 5 وهو يساوي $m + n - 1$. فهذا الحل هو إذن مقبول.

نحاول الآن أن نرى إذا ما كان هذا الحل قابل للتحسين أم لا: أي نبحث عن الحل الأمثل.

إيجاد الحل الأمثل باستعمال طريقة التحويل:

نستعمل الآن طريقة التحويل لإيجاد الحل الأمثل للمثال السابق.

المحاولة I:

جدول $-C_{ij}-$

3	2	4
1	4	3
4	2	5

جدول الحل الابتدائي.

	15	10
20		10
	35	

جدول - I -

				E_i
	-	2	4	2
	1	-	3	1
	-	2	-	2
F_j	0	0	2	

جدول - III -

3	-	-
-	4	-
4	-	5

جدول - II -

				E_i
	2	-	-	2
	-	1	-	1
	2	-	4	2
F_j	0	0	2	

جدول - IV -

1	-	-
-	3	-
2	-	1

نلاحظ أن الجدول الرابع لا يحتوي على قيم سالبة وبالتالي فالحل الابتدائي الأسبق هو حل أمثل لهذا المثال بتكلفة نقل كلية تساوي 190 و.ن.

مثال 2: نحل هذا المثال أيضا باستعمال طريقة التكاليف الصغرى.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	
A_1	8	12	4	18	30	22	600
A_2	18	6	14	28	24	16	450
A_3	16	4	12	24	8	26	750
A_4	28	22	4	16	6	10	650
	500	400	250	450	300	550	

البحث عن الحل الابتدائي:

نستخدم طريقة التكاليف الصغرى.

خطوة4	خطوة1	خطوة2	8 و 7	خطوة3	6 و 5	ترتيب الحل
8 500	12	4	18 100	30	22	600 100 0
18	6	14	28	24	16 450	450 0
16	4 400	12	24 350	8	26	750 350 0
28	22	4 250	16	6	10 100	650 400 100 0
500	400	250	450	300	550	
0	0	0	350	0	450	
			0		0	

إذن فالحل الابتدائي يتكون من طرق النقل التالية:

$100=A_4B_6$, $300=A_4B_5$, $250=A_4B_3$, $400=A_3B_2$, $450=A_2B_5$, $100=A_1B_4$
, $300=A_4B_5$.

وتكلفته الكلية = **26800** و.ن.

ولكن نلاحظ هنا أن عدد طرق النقل المستخدمة في هذا الحل (وهي8) لا يساوي (m+n-1) أي أن: $8 \neq 9 = m + n - 1$.

إذن فهذا الحل الابتدائي **غير مقبول**، ولا نستطيع الاعتماد عليه في البحث عن حل أمثل للمسألة المطروحة. وفي هذه الحالة من أجل التخلص من هذا العائق نعيد تتبع خطوات الحل الابتدائي من أجل الإشارة إلى **مصدر** هذا المشكل (انخفاض عدد طرق النقل المستخدمة عن m+n-1) وكيف يتم معالجته.

نلاحظ أنه عند البحث عن الحل الابتدائي،وعندما نصل إلى الخطوة رقم 6: الخانة ذات التكلفة الأقل من بين الخانات المتبقية هي الخانة (A_2 , B_6). الكميات التي تقابلها (المعروضة والمطلوبة) **متساويتان**، أي أن $(b_6 = a_2 = 450)$ وينتج عن ملء هذه الخانة بالكمية 450 أن تصبح $(b_6 = a_2 = 0)$ وهذا يتطلب **شطب** العمود السادس والصف الثاني لأن كليهما أصبح مشبعا. إن هذا الشطب المتزامن للعمود السادس وللصف الثاني هو الذي يترتب عليه انخفاض عدد طرق النقل المستخدمة في الحل عن العدد المطلوب وفق المقياس $(m+n-1)$. ولو تكررت هذه المشكلة خلال الحل مرة أو مرتين أو أكثر وقمنا على إثرها في كل مرة بشطب العمود والصف مع بعض لأدى ذلك إلى انخفاض عدد طرق النقل عن العدد المطلوب عدة مرات.

لمعالجة هذا المشكل فإنه عندما تصبح الكمية (a_i) والكمية (b_j) المقابلة للخانة التي نريد ملأها **متساويتان** فإنه بعد ملء الخانة المعنية لا يجب شطب الصف والعمود اللذين يتقاطعان عند هذه الخانة مع بعض بل يجب شطب أحدهما فقط. من أجل الاختيار من الصف أو العمود الذي يجب شطبه ننظر إلى الخانات التي لا زالت فارغة في الصف والعمود المعنيين، ونشطب الصف أو العمود الذي يحتوي على أكبر تكاليف النقل للخانات التي لا زالت فارغة فيه ونترك ذلك الذي يحتوي على خانات فارغة تكاليف نقلها هي الأصغر.

بالرجوع إلى مثالنا، نلاحظ أنه بعد ملء الخانة (A_2 , B_6) يتبقى في الصف الثاني خانة واحدة فارغة وتكلفة نقلها تساوي 28، بينما الخانات الفارغة في العمود السادس هي ذات تكاليف (22 ,26)، وواضح أنه يجب شطب الصف وإبقاء

العمود، ولكن بكمية مقابلة له تساوي الصفر. هذه الكمية الصفرية نضعها داخل إطار حتى نميزها عن الأصفار الأخرى ونتعامل معها على أنها كمية منقولة حقيقية، ثم نواصل الحل حسب هذه الطريقة بصفة عادية. يترتب على مواصلة الحل بهذا المنهج أن عدد طرق النقل المستخدمة سوف يكون مساويا للعدد المطلوب وفق المقياس (m+n-1)، ولكن أحد الطرق سوف تكون الكمية المنقولة فيه تساوي صفرا ويجب التعامل معها على أنها كمية منقولة حقيقية. الجدول التالي يوضع معالجة مشكل عدم قبولية الحل الابتدائي الناتجة عن انخفاض عدد طرق النقل تحت العدد المطلوب.

4	1	2	8 و7	3	6 و5	ترتيب الحل			
8 500	12	4	18 100	30	22	600	100	0	
18	6	14	28	24	16 450	450	0		
16	4 400	12	24 350	8	26 0	750	350	0	
28	22	4 250	16	6	10 100	650	400	100	0
500 0	400 0	250 0	450 350 0	300 0	550 450 $\boxed{0}$				

نلاحظ الآن أن عدد طرق النقل المستعملة في الحل الابتدائي يساوي تسعة وهو العدد المطلوب وفق المقياس (m+n-1)، وبالتالي فالحل الابتدائي مقبول وتكلفته تساوي 26800 و.ن.

البحث عن الحل الأمثل:

نستخدم في البحث عن الحل الأمثل طريقة التحويل.

المحاولة الأولى:

لدينا الجدول الممثل لطرق النقل حسب الحل الابتدائي، وجدول تكاليف النقل الأحادية (C_{ij}).

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
A_1	8	12	4	18	30	22
A_2	18	6	14	28	24	16
A_3	16	4	12	24	8	26
A_4	28	22	4	16	6	10

350			100		
					450
	400		350		0
		250		300	100

							E_i
	8	–	–	18	–	–	8
	–	–	–	–	–	16	4
	–	4	–	24	–	26	14
	–	–	4	–	6	10	2-
F_j	0	–10	6	10	8	12	

جدول - I-

–	12	4	–	30	22
18	6	14	28	24	–
16	–	12	–	8	–
28	22	–	16	–	–

جدول III-

							E_j
	–	2-	14	–	16	20	8
	4	-6	10	14	12	–	4
	14	–	20	–	22	–	14
	-2	-12	–	8	–	–	2-
F_j	0	-10	6	10	8	12	

جدول - II -

–	14	-10	–	14	2
14	12	4	14	12	–
2	–	-8	–	-14	–
30	34	–	8	–	–

جدول - IV -

نذهب إلى شبكة النقل المحصل عليها في الحل الابتدائي ونجري التحويل إلى طريق النقل (a_3 , b_5)، فنحصل على الشبكة الجديدة التالية:

500			100		
					450
	400		350	+	– 0
		250		300 –	+ 100

500			100		
					450
	400		350	0	
		250		300	100

الشيء الذي يجب الإشارة إليه هنا هو أن حلقة التحويل المكونة تحتوي على كميتين موجودتين في الخانتين التي على رؤوسها إشارات سالبة، إحدى هذين الكميتين هي (0)– نعتبر أن أصغر كمية من بينهما هي الكمية **صفر** وبالتالي يجب

تحويل الصفر من طريق النقل (A_3 , B_6) إلى طريق النقل (A_3 , B_5) عبر دورة التحويل.

ينتج عن هذه المحاولة شبكة نقل جديدة تكلفتها الكلية هي:

26800 – 14. (0) = 26800 و.ن.

المحاولة الثانية:

							E_i
	8	–	–	18	–	–	8
	–	–	–	–	–	16	18
	–	4	–	24	8	–	14
	–	–	4	–	6	10	12
F_j	0	-10	8-	10	6-	2-	

جدول - I -

–	12	4	–	30	22
18	6	14	28	24	–
16	–	12	–	–	26
28	22	–	16	–	–

جدول - III -

							E_i
	–	2-	0	–	2	6	8
	18	8	10	28	12	–	18
	14	–	6	–	–	12	14
	12	2	–	22	–	–	12
F_j	0	-10	8-	10	6-	2-	

جدول - II -

–	14	-10	–	28	16
0	2-	4	0	12	–
2	–	-8	–	–	14
16	20	–	6-	–	–

جدول - IV -

نذهب إلى شبكة النقل المحصل عليها في المحاولة الأولى ونجري التحويل إلى طريق النقل (A_4 , B_4)، فنحصل على الشبكة الجديدة التالية:

500			100		
					450
	400		350 −	+ 0	
		250	+	− 300	100

500			100		
					450
	400		50	300	
		250	300		100

التكلفة الكلية لشبكة النقل الجديدة هي: 26800–6×300- 25000و.ن.

المحاولة الثالثة:

							E_i
	8	–	–	18	–	–	8
	–	–	–	–	–	16	12
	–	4	–	24	8	–	14
	–	–	4	16	–	10	6
F_j	0	–	2–	10	6–	4	

جدول - I -

–	12	4	–	30	22
18	6	14	28	24	–
16	–	12	–	–	26
28	22	–	–	6	–

جدول -

							E_i
	–	2–	6	–	2	12	8
	12	2	10	22	6	–	12
	14	–	12	–	–	18	14
	6	4–	–	–	0	–	6
F_j	0	−10	2–	10	6–	4	

جدول - II -

–	14	−2	–	28	10
6	4	4	6	18	–
2	–	0	–	–	8
22	26	–	–	6	–

جدول - IV -

نذهب إلى شبكة النقل المحصل عليها في المحاولة الثانية ونجري التحويل إلى طريق النقل (A_1, B_1)، فنحصل على الشبكة الجديدة التالية:

500			+	-100		450
				50	300	
	400					100
		250 -		+ 300		

500		100				450
				50	300	
	400					100
		150		400		

التكلفة الكلية لشبكة النقل الجديدة هي: $25000-2\times100=24800$ و.ن.

المحاولة الرابعة:

						E_i
8	–	4	–	–	–	8
–	–	–	–	–	16	14
–	4	–	24	8	–	16
–	–	4	16	–	10	8
F_j	0	–	4–	8	8–	2

جدول - I -

–	12	–	18	30	22
18	6	14	28	24	–
16	–	12	–	–	26
28	22	–	–	6	–

جدول III-

						E_i
–	4–	–	16	0	10	8
14	2	10	22	6	–	14
16	–	12	–	–	18	16
8	4–	–	–	0	–	8
F_j	0	-12	4–	8	8–	2

جدول - II -

–	16	–	2	30	12
4	4	4	6	18	–
0	–	0	–	–	8
20	26	–	–	6	–

جدول - IV -

نلاحظ أن الجدول الرابع لا يحتوي على القيم السالبة، وبالتالي فالحل
حصل عليه في المحاولة الثالثة هو الحل الأمثل (24800 و.ن)، وهو يمثل أدنى
لفة نقل يمكن الوصول إليها

المبحث الثالث

حل مسألة النقل باستعمال طريقة الفروقات الكبرى

La Méthode des différences maximales

طريقة الفروقات الكبرى أو طريقة فوجل (R.w. Fogel) تسمح بإيجاد حل ابتدائي عادة ما يكون قريبا من الأمثل. البحث عن الحل الابتدائي وفق هذه الطريقة يتكون من الخطوات التالية:

1- في كل صف وعمود من جدول التكاليف الأحادية (C_{ij}) لمسألة النقل نقوم بتحديد أصغر تكلفتين للنقل.

2- نجد الفرق بين هذين التكلفتين.

3- نبدأ الحل دائما من الصف أو العمود الذي يقابله **أكبر** فرق، وفي هذا الصف أو العمود نبحث عن أصغر تكلفة نقل (C_{ij}).

4- نقوم بملء هذه الخانة ذات التكلفة الأصغر **بأقل** الكميتين (b_j ,a_i) التي تقابلها: $\min (a_i , b_j)$

5- بعد هذا نشطب الصف أو العمود الذي أشبع تماما، ثم نذهب إلى الفرق الأصغر من السابق مباشرة ونعيد العمليات السابقة من جديد حتى تستهلك كل الكميات المتاحة لدى المصادر وتشبع كل احتياجات المستعملين.

6 – في حالة وجود عدة فروق كبرى متساوية، يجب أن نختار ذلك الفرق الذي يقابل العمود أو الصف الذي توجد به أصغر تكلفة نقل (C_{ij})، أي طريق النقل الأرخص وإذا كانت الخانات ذات التكلفة الأصغر أيضا متعددة، فنختار تلك التي يكون مجموع الفروق المقابلة لها في الصف والعمود هو الأكبر.

7- إذا كانت التكلفتان الصغيرتان في العمود أو الصف متساويتين، فيمكن أن نحسب الفرق بينهما (صفر) ويصبح هذا الصفر هو أصغر فرق من بين الفروقات، أو نحسب الفرق بين إحدى هذين التكلفتين والتكلفة الأكبر منها مباشرة، وكلاهما صحيح.

مثال1: نستعمل طريقة "الفروقات الكبرى" في حل المثال الأول السابق. نقوم بحساب الفروقات بين أصغر قيم التكاليف في الأعمدة والصفوف. هذه الفروقات تظهر فوق الجدول وعلى يساره.

بعد هذا نبدأ في ملء الخانات ذات التكاليف الأقل التي تقابلها أكبر الفروقات.

هناك أربع فروقات كبرى متساوية وقيمتها (2)، نلاحظ أن الفرقين الكبيرين المقابلين للصف الثاني والعمود الأول هما اللذان يوجد فيهما الخانات ذات التكلفة الأصغر التي قيمتها (1). لكن الخانة ذات التكلفة الأقل الموجودة في العمود الأول هي نفسها الموجودة في الصف الثاني (1)، وحتى قيم بقية الخانات الموجودة في الصف الثاني والعمود الأول هي متساوية. لذلك نختار عشوائيا الفرق المقابل للصف الثاني.

في هذا الصف أصغر تكلفة نقل هي (1) وهي موجودة في الخانة (A_2, B_1)، فنملأها بـ (20) وحدة وهي أقل القيمتين (20,30).

نشطب بعدها العمد الأول (B_1) لأنه اشبع تماما، أما الصف الثاني فما زال يحتاج إلى 10 وحدات من المنتج. بعد ذلك يبقى الفرقين الكبيرين (2) المقابلين للصف الثالث والعمود الثاني، ونلاحظ هنا أيضا أن الخانة ذات التكلفة الأصغر هي نفسها في العمود والصف المذكورين، فنختار عشوائيا الفرق المقابل للصف الثالث. نواصل الحل بنفس المنهج حتى الوصول إلى نهاية الحل.

		B_1	B_2	B_3	
		Δ=2	Δ=2	Δ=1	
Δ=1	A_1	3	2	4	25
Δ=2	A_2	1 20	4	3	10
Δ=2	A_3	4	2	5	35
		0	50	20	

ثم نذهب إلى الفرق المقابل للصف الثالث، ثم المقابل للعمود الثاني، العمود الثالث وننهي الحل بالفرق المقابل للصف الأول. فنحصل على الجداول التالية:

	B_1	B_2	B_3	
A_1	3	2	4	25
A_2	1 20	4	3	10
A_3	4	2 35	5	0
	0	15	20	

	B_1	B_2	B_3	
A_1	3	2 15	4	10
A_2	1 20	4	3	10
A_3	4	2 35	5	0
	0	0	20	

	B_1	B_2	B_3	
A_1	3	2 / 15	4	10
A_2	1 / 20	4	3 / 10	0
A_3	4	2 / 35	5	0
	0	0	10	

	B_1	B_2	B_3	
A_1	3	2 / 15	4 / 10	0
A_2	1 / 20	4	3 / 10	0
A_3	4	2 / 35	5	0
	0	0	0	

شبكة النقل والكميات المنقولة في الحل الابتدائي حسب هذه الطريقة هي:

$X_{11} = 0, X_{12} = 15, X_{13} = 10$

$X_{21} = 20, X_{22} = 0, X_{23} = 10$

$X_{31} = 0, X_{32} = 35, X_{33} = 0$

وتكون تكلفة النقل الكلية للحل الابتدائي هي:

$(2 \cdot 15 + 4 \cdot 10)/a_1 + (1 \cdot 20 + 3 \cdot 10)/a_2 + (2 \cdot 35)/a_3 = 190$ و.ن

نختبر الآن هل هذا الحل مقبول أم لا: نلاحظ أن عدد الطرق النقل المستعملة
ه يساوي 5 وهو يساوي $m + n - 1$. فهذا الحل هو إذن مقبول.

ال2:

– البحث عن الحل الابتدائي: نستعمل طريقة الفروقات الكبرى.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	
A_1	8	12	4	18	30	22	600
A_2	18	6	14	28	24	16	450
A_3	16	4	12	24	8	26	750
A_4	28	22	4	16	6	10	650
	500	400	250	450	300	550	

نحسب الفروقات بين أصغر تكلفتين في كل صف وفي كل عمود ونسجلهم في أعلى الجدول وعلى يساره.

	8	2	8	2	2	6	
4	8 350	12	4 250	18	30	22	600 350 0
8	18	6 400	14	28 50	24	16	450 50 0
4	16 150	4	12	24 300	8 300	26	750 450 300
2	28	22	4	16 100	6	10 550	650 100 0
	500 150 0	400 0	250 0	450 350 0	300 0	550 0	

عدد طرق النقل المستخدمة في الحل الابتدائي المحصل عليه بواسطة طريقة (Fogel) يساوي 9 وهو يساوي العدد المطلوب حسب المقياس (m+n-1) الذي يتطلب عدد من طرق النقل يساوي (6 + 4 -1) = 9، فالحل الابتدائي إذن مقبول وتكلفة شبكة النقل حسب هذا الحل الابتدائي تساوي 26700 و.ن. يجب مواصلة الحل بالبحث عن حل أمثل سواء باستخدام طريقة التحويل أو طريقة التجريب.

القسم الثاني

حالة العرض ≠ الطلب (النموذج المفتوح)

إلى حد الآن، تعرضنا للحالة عندما كان مجموع ما هو متوفر في أماكن التموين يساوي مجموع الاستهلاك أو مجموع ما يطلبه المستعملون، أي: $\sum a_i = \sum b_j$.

ولكن في الواقع هذه الحالة ليست الوحيدة، ففي الواقع توجد هناك حالتين أخريين، تعكسان حالة عدم تساوي العرض الكلي مع الطلب الكلي، وفي مثل هذه الحالات لا يمكن حل مسألة النقل إلا إذا تم إعادة التوازن بين العرض الكلي مع الطلب الكلي.

الحالة الأولى: مجموع ما هو متوفر (مجموع العرض) أكبر من مجموع الكميات المستهلكة (مجموع الطلب) $\sum a_i < \sum b_j$.

في هذه الحالة ومن أجل إعادة التوازن بين العرض والطلب، يتعين إضافة مستعمل وهمي (A_{m+1}) بكمية مطلوبة (a_{m+1}) تساوي الفرق بين مجموع الطلب ومجموع العرض وبتكاليف نقل أحادية (C_{ij}) تساوي الصفر. وظيفة هذا المستعمل الوهمي أو الافتراضي هي امتصاص الكمية المعروضة الفائضة عن حاجة المستعملين الحاليين.

الحالة الثانية: حالة مجموع الطلب أكبر من مجموع العرض. أي: $\sum a_i > \sum b_j$. وفي هذه الحالة نضيف مصدر تموين وهمي (B_{n+1}) بكمية معروضة (b_{n+1}) تساوي الفرق بين مجموع الطلب والعرض، وبتكاليف نقل أح

ادية (C_{ij}) صفرية.

بعد إعادة التوازن للمسألة يمكن حلها بصفة عادية بأي من الطرق المشار إليها سابقا، وبعد حل المسألة نتغاضى عن المستعمل أو الممون الوهمي.

ملاحظة:

1- التكاليف الأحادية الصفرية (تكاليف الصف أو العمود الوهمي) تعتبر مثل غيرها من التكاليف الأحادية في جدول النقل، فهي تعتبر التكاليف الدنيا في الصف أو العمود الذي توجد فيه.

2- في طريقة الفروقات الكبرى ، حساب الفرق بين أقل التكلفتين في كل صف و في كل عمود يجب أن يأخذ بعين الاعتبار التكلفة الصفرية.

3- في طريقة التكاليف الصغرى، التكلفة الصفرية تعتبر أقل تكلفة ممكنة في الصف أو العمود الموجودة فيه هذه التكلفة التي تبدأ منها عملية التحويل.

مثال1 على الحالة الأولى: لدينا ثلاث مصادر للتموين بمنتج معين وثلاث مستعملين لهذا المنتج. تكاليف النقل الأحادية (C_{ij}) وكذلك الكميات المطلوبة والمعروضة معطاة بالجدول التالي:

	B_1	B_2	B_3	
A_1	5	2	3	15
A_2	2	4	6	25
A_3	5	3	3	35
	20	20	45	75 / 85

المطلوب: تحديد أرخص شبكة للنقل تمكن من نقل المنتج المعني من مصادر تواجده إلى مستعمليه بأقل تكلفة ممكنة.

نلاحظ أن مجموع العرض يساوي 85 وهو أكبر من مجموع الطلب الذي يساوي 75. من أجل حل هذه المسألة يجب إضافة مستعمل رابع (وهمي) بكمية مطلوبة تساوي 85 - 75 = 10 وحدات، وذلك بإضافة صف إضافي بتكاليف أحادية صفرية. ويصبح الجدول التالي يمثل مسألة نقل متوازنة حيث العرض=الطلب.

	B_1	B_2	B_3	
A_1	5	2	3	15
A_2	2	4	6	25
A_3	5	3	3	35
A_4	0	0	0	10
	20	20	45	85 / 85

يمكن الآن حل المسألة بأي من الطرق المشار إليها سابقا.

الحل الابتدائي: نجد الحل الابتدائي باستخدام طريقة الفروقات الكبرى.

		2	2	3	
		B_1	B_2	B_3	
1	A_1	5	2 15	3	0
2	A_2	2 20	4 5	6	0
2	A_3	5	3 0	3 35	0
0	A_4	0	0	0 10	0
		0	0	0	

عدد طرق النقل المستخدمة في هذا الحل يساوي 6 وهو نفس العدد المطلوب وفق المقياس n+m-1، فالحل الابتدائي **مقبول**، مع الإشارة إلى أن الكمية المنقولة في إحدى طرق النقل (A_3 , B_2) تساوي **صفر** وذلك لتفادي الوقوع في حالة عدم انتظام (حالة عدد طرق النقل أصغر من العدد المطلوب).

تكلفة شبكة النقل لهذا الحل الابتدائي تساوي 195 و.ن. يمكن البحث عن الحل الأمثل باستعمال أي من الطرق المشار إليها سابقا.

مثال2: حل مسألة النقل التالية وفق المعطيات الواردة في الجدول أدناه:

	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4	5	6	7	50
A_2	4	9	3	2	150
A_3	6	5	2	3	60
A_4	8	1	2	4	40
	50	40	160	80	300 \ 330

نلاحظ أن مجموع ما هو متاح لدى مصادر التموين يساوي 330 وهو أكبر من مجموع احتياجات المستعملين التي تساوي 300. من أجل حل هذه المسألة يجب إضافة مستعمل خامس (وهمي) بكمية مطلوبة تساوي 330 - 300 = 30 وحدة،

وذلك بإضافة صف إضافي إلى الجدول السابق بتكاليف أحادية صفرية. ويصبح الجدول التالي يمثل مسألة نقل متوازنة حيث العرض = الطلب.

	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4	5	6	7	50
A_2	4	9	3	2	150
A_3	6	5	2	3	60
A_4	8	1	2	4	40
A_5	0	0	0	0	30
	50	40	160	80	330 / 330

الحل الابتدائي: نستخدم طريقة الفروقات الكبرى في إيجاده.

		4	1	2	2	
		B_1	B_2	B_3	B_4	
1	A_1	4 / 20	5	6 / 30	7	0
1	A_2	4	9	3 / 70	2 / 80	0
1	A_3	6	5	2 / 60	3	0
1	A_4	8	1 / 40	2 / 0	4	0
0	A_5	0 / 30	0	0	0	0
		0	0	0	0	330 / 330

عدد طرق النقل المستعملة في هذا الحل الابتدائي تساوي 8 وهي تكافئ، العدد المطلوب حسب المقياس n+m-1، فهذا الحل إذن مقبول، وتكلفته تساوي: 790 و.ن.

البحث عن الحل الأمثل باستعمال طريقة التحويل:

نستخدم الآن طريقة التحويل لإيجاد الحل الأمثل.

المحاولة I:

جدول $-C_{ij}-$

4	5	6	7
4	9	3	2
6	5	2	3
8	1	2	4
0	0	0	0

جدول الحل الابتدائي.

20		30	
		70	80
		60	
	40	0	
30			

جدول - I -

					E_i
	4	–	6	–	4
	–	–	3	2	1
	–	–	2	–	0
	–	1	2	–	0
	0	–	–	–	0
F_j	0	1	2	1	

جدول - III -

–	5	–	7
4	9	–	–
6	5	–	3
8	–	–	4
–	0	0	0

جدول - II -

					E_i
	-	5	-	5	4
	1	2	-	-	1
	0	1	-	1	0
	0	-	-	1	0
	-	1	2	1	0
F_j	0	1	2	1	

جدول - IV -

-	0	-	2
3	7	-	-
6	4	-	2
8	-	-	3
-	-1	2-	1-

نلاحظ أن الجدول الرابع يحتوي على عدة قيم سالبة وبالتالي فالحل الابتدائي لا يعتبر حلا أمثلا.

نستمر إذن في البحث عن الحل الأمثل وذلك بإدخال طريق النقل (a_5, b_3) ونحول إليه كمية منقولة ما من إحدى طرق النقل المستخدمة حاليا. باستخدام شبكة النقل المحصل عليها في الحل الابتدائي نكون دورة تحويل لملء طريق النقل (a_5, b_3) كالتالي:

20 +			- 30	
			70	80
			60	
	40		0	
30 -			+	

هذه المحاولة تتضمن حالة خاصة من حالات حل مسألة النقل وتتمثل في أن الكميات الموجودة في الخانات ذات الإشارة السالبة هي كلها متساوية، وبالتالي فإن نقل إحدى هذين الكميتين إلى طريق النقل (A_5,B_3) يترتب عليه انخفاض عدد طرق النقل المستخدمة بواحد، ويصبح **سبعة** فقط عوض ثمانية المطلوبة. لذلك لا

نستطيع والحالة هذه مواصلة الحل إلا بإعادة إرجاع عدد طرق النقل المستعملة في شبكة النقل إلى **ثمانية**. هنا نتفحص الخانتين اللتين أصبحتا فارغتين بفعل الحالة المشار إليها، وهما الخانة (A_5,b_1) و(A_1,B_3) فنحتفظ بطريق النقل (A_5,B_1) لأنه ذو تكلفة النقل الأصغر (0) ونضع فيه كمية منقولة تساوي **صفر** ونتخلى عن طريق النقل (A_1,B_3) لأنه الأعلى، فنحول الكمية التي كانت منقولة فيه إلى (A_5,B_3). نحصل بعد ذلك على شبكة نقل جديدة كالتالي:

50			
		70	80
		60	
	40	0	
0		30	

تكلفة النقل الجديدة حسب هذه الشبكة تساوي: $790 - 2 \times 30 = \mathbf{730}$ و.ن.

المحاولة II:

جدول $-C_{ij}-$

4	5	6	7
4	9	3	2
6	5	2	3
8	1	2	4
0	0	0	0

شبكة النقل بعد المحاولة الأولى.

50			
		70	80
		60	
	40	0	
0		30	

					E_i
	4	–	–	–	4
	–	–	3	2	3
	–	–	2	–	2
	–	1	2	–	2
	0	–	0	–	0
F_j	0	–1	0	–1	

جدول - I -

–	5	6	7
4	9	–	–
6	5	–	3
8	–	–	4
–	0	–	0

جدول - III -

					E_i
	–	3	4	3	4
	3	2	–	–	3
	2	1	–	1	2
	2	–	–	1	2
	–	–1	2	–1	0
F_j	0	–1	0	–1	

جدول - II -

–	2	2	4
1	7	–	–
4	4	–	2
6	–	–	3
–	1	–	1

جدول - IV -

نلاحظ أن الجدول الرابع لا يحتوي على القيم السالبة وبالتالي فالحل المحصل عليه بعد المحاولة الأولى يعتبر حلا أمثلا، وقيمته 730 و.ن.

مثال على الحالة الثانية: الجدول التالي يعطينا الكميات المتوفرة لدى ثلاث ممونين، والكميات المطلوبة من طرف ثلاث مستهلكين لمنتج معين وكذلك تكاليف النقل

للوحدة (C_{ij}). والمطلوب إيجاد أرخص شبكة نقل يمكن بواسطتها تلبية كل طلب المستهلكين.

	B_1	B_2	B_3	
A_1	2	5	4	22
A_2	7	3	3	35
A_3	4	8	6	28
	20	15	30	85 / 65

هنا في هذا المثال مجموع الكمية المطلوبة تساوي (85) وحدة وهي أكبر من مجموع الكمية المعروضة (65) وحدة. من أجل حل هذه المسألة يلزم إضافة ممون رابع وهمي بكمية معروضة تساوي الفرق بين العرض الكلي والطلب الكلي : (85 -65 = 20) وحدة وبتكاليف أحادية صفرية. أي: ($C_{14} = C_{24} = C_{34} = 0$).

جدول النقل للمثال السابق يصبح كالتالي:

	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2	5	4	0	22
A_2	7	3	3	0	35
A_3	4	8	6	0	28
	20	15	30	20	85 / 85

الآن أصبح مجموع الطلب = مجموع العرض وبالإمكان حل هذه المسألة بأي من الطرق السابقة.

الحل الابتدائي: إيجاد الحل الابتدائي باستخدام طريقة الفروقات الكبرى.

		2	2	1	0	
		B_1	B_2	B_3	B_4	
2	A_1	2 20	5	4 2	0	0
3	A_2	7	3 15	3 20	0	0
4	A_3	4	8	6 8	0 20	0
		0	0	0	0	

عدد طرق النقل المستخدمة في هذا الحل يساوي 6 وهو نفس العدد المطلوب وفق المقياس n+m-1، فالحل الابتدائي **مقبول**، تكلفة شبكة النقل لهذا الحل الابتدائي تساوي **201** و.ن.

يمكن البحث عن الحل الأمثل باستعمال أي من الطرق المشار إليها سابقا.

القسم الثالث

بعض الحالات الخاصة لمسألة النقل

من أجل إيجاد حل لبعض الحالات الخاصة لمسائل النقل، يجب الأخذ بعين الاعتبار بعض القيود الإضافية المفروضة فيها، التي تعكس معطيات وشروطا لم تكن متضمنة في حالات مسائل النقل العادية التي تم معالجتها سابقا. نشير في هذا المقام إلى بعض الحالات الممكنة لمثل هذه المسائل.

1-يشار في بعض مسائل النقل إلى أن عملية نقل المنتج المراد نقله من مصدر معين (B_j) إلى مستعمل (A_i) غير ممكنة التحقيق لأسباب مختلفة قد تكون تقنية أو غيرها (بمعنى عدم إمكانية استعمال هذا الطريق). من أجل إيجاد حل أمثل لمثل هذا النوع من مسائل النقل، نفترض أن تكلفة النقل الوحدوية (C_{ij}) من المصدر (B_j) إلى المستعمل (A_i) المعنيين هي قيمة مرتفعة جدا تقترب من مالا نهاية، ونرمز لها الرمز (M و.ن.). بعد ذلك يمكن حل هذه المسألة باستعمال أي من طرق الحل التي تم استعمالها سابقا.

إن الافتراض السابق يسمح بالحصول على حل أمثل لمسألة النقل يستثني فيه إمكانية استعمال طريق النقل المشار إليه أعلاه، وهذا المدخل في حل مسألة النقل يعني في مضمونه توقيف أو منع طريق النقل غير ممكن الاستعمال.

2-تتضمن بعض مسائل النقل أحيانا شرطا إضافيا ينص على ضرورة الالتزام بنقل كمية معينة ما محددة من مصدر معين (B_j) إلى مستعمل (A_i)، كأن يفترض مثلا على أن الكمية الواجب نقلها من عند المصدر (B_j) إلى المستعمل (A_i) هي محددة ومعطاة مسبقا ومقدارها مثلا (d_{ij} وحدة). في مثل هذه الحالة نضع في الخلية التي تجمع بين (B_j) و (A_i) في جدول الكميات المنقولة نضع الكمية (d_{ij} وحدة)،

ومن أجل إيجاد حل أمثل لهذه المسألة يتضمن بالضرورة نقل كمية بين (B_j) و (A_i) مساوية تماما لـ(d_{ij}) ، نفترض أن تكلفة النقل الوحدوية (C_{ij}) بين الطرفين المذكورين هي قيمة كبيرة جدا مقدارها (M و.ن.). إن طرح مسألة النقل الجديدة بالافتراضات المشار إليها سوف يضمن لنا الحصول على حل أمثل للمسألة الأصلية يأخذ بعين الاعتبار القيد المفروض فيها.

3-هناك حالة أخرى يشار فيها إلى أن الكمية المنقولة من عند مصدر معين (B_j) إلى مستعمل ما (A_i) لا يجب أن تقل عن كمية معينة ما معطاة (d_{ij})، أي أن: $X_{ij} \geq (d_{ij})$. من أجل إيجاد حل أمثل لمثل هذه المسائل ننطلق من افتراض أن الكمية المتوفرة من المنتج عند المصدر (B_j) والكمية المطلوبة من طرف المستعمل (A_i) هي أقل من الكمية الفعلية المعطاة بمقدار (d_{ij}). باحترام هذا الشرط نجد حلا أمثلا لمسألة النقل الجديدة، الذي على قاعدته يحدد الحل الأمثل للمسألة الأولى.

4-بعض مسائل النقل يطرح فيها شرط آخر يتضمن ضرورة الأخذ بعين الاعتبار أن تكون الكمية المنقولة من المنتج (B_j) إلى المستعمل (A_i) لا تفوق مقدارا معينا (d_{ij}) مثلا، أي: $X_{ij} \leq (d_{ij})$.

سوف نتعرض في ما يلي لحل أمثلة لبعض من هذه الحالات.

مثال 1

تعاقدت إحدى مؤسسات إنتاج الأثاث المنزلي المصنوع من البلاستيك مع إحدى مؤسسات الأسواق الكبرى لتجارة الجملة على أن تبيع الوحدات الإنتاجية (B_1)، (B_2)، (B_3)، التابعة لمؤسسة الإنتاج إلى محلات البيع بالجملة (A_1)، (A_2)،

(A_3)، (A_4)، التابعة لمؤسسة الأسواق أنواعا معينة من الكراسي. الجدول التالي يتضمن الكميات المطلوبة من طرف محلات البيع والمتوفرة عند وحدات الإنتاج، وكذلك تكاليف النقل الوحدوية بينهما.

	B_1	B_2	B_3	
A_1	1,1	0,8	1,6	8800
A_2	2,6	2,4	3,4	5800
A_3	1,9	2	2,8	2900
A_4	2,2	2,1	1,7	2100
	7250	10150	4350	19600 / 21750

اتضح أن الكراسي المنتجة في (B_3) لا تناسب خصائص الطلبية المقدمة من طرف محل البيع (A_1) وبالتالي فهو لا يستطيع استلامها، وأن تلك المنتجة من طرف (B_2) لا تناسب ما طلبه محل البيع (A_2) فامتنع عن استلامها هو أيضا. المطلوب إيجاد شبكة النقل الأرخص التي بموجبها يتم نقل الكميات المطلوبة من الكراسي من وحدات الإنتاج إلى المحلات التجارية مع الأخذ بعين الاعتبار الشروط المشار إليها أعلاه.

الحل

قبل الشروع في حل هذه المسألة، نحاول تحوير معطياتها حسب الشروط الإضافية المنصوص عليها فيها، بحيث أن تكلفتا النقل الوحدويتين (C_{13}) و (C_{22}) تساويان قيمة مقدارها (M و.ن.).

	B_1	B_2	B_3	
A_1	1,1	0,8	M	8800
A_2	2,6	M	3,4	5800
A_3	1,9	2	2,8	2900
A_4	2,2	2,1	1,7	2100
	7250	10150	4350	19600 / 21750

أ – الحل الابتدائي

من أجل إيجاد الحل الابتدائي نستعمل طريقة الفروقات الكبرى

		$\Delta=1,1$	$\Delta=0,8$	$\Delta=1,7$	
		B_1	B_2	B_3	
$\Delta=0,3$	A_1	1,1 7250	0,8 1550	M	8800 0
$\Delta=0,8$	A_2	2,6	M 3600	3,4 2200	5800 0
$\Delta=0,1$	A_3	1,9	2 2900	2,8	2900 0
$\Delta=0,4$	A_4	2,2	2,1 2100	1,7	2100 0
$\Delta=0$	A_5	0	0	0 2150	2150 0
		7250 0	10150 0	4350 0	

عدد طرق النقل المستخدمة في الحل الابتدائي تساوي 07، وهي تساوي العدد المطلوب حسب المقياس (n+m+1)، فهذا الحل إذن مقبول. التكلفة الكلية للنقل حسب هذا الحل تساوي: 26905 + 3600 m و.ن.

ب – الحل الأمثل

من أجل إيجاد الحل الأمثل نستعمل طريقة التحويل كالتالي:

المحاولة الأولى

				E_i
	1,1	0,8	---	1,1
	---	M	3,4	M +0,3
	---	2	---	2,3
	---	2,1	---	2,4
	---	---	0	M -3,1
F_J	0	-0,3	3,1 - m	جدول 1

				E_i
	---	---	-m +4,2	1,1
	M +0,3	---	---	M +0,3
	2,3	---	-m +5,4	2,3
	2,4	---	-m +5,5	2,4
	M -3,1	M -3,4	---	M -3,1
F_J	0	-0,3	3,1 - m	جدول 2

---	---	m
2,6	---	---
1,9	---	2,8
2,2	---	1,7
0	0	---

جدول 3

---	---	2m − 4,2
−M +2,3	---	---
−0,4	---	+m − 2,6
−0,2	---	+m − 3,8
−M +3,1	−M +3,4	---

جدول 4

3650	5150	
3600	---	2200
	2900	
	2100	
		2150

−7250	1550+	
+	− 3600	2200
	2900	
	2100	
		2150

تكلفة النقل الكلية المحصل عليها بعد المحاولة الأولى تساوي:

$35185 = (-m + 2,3).\ 3600 + 3600m + 26905$ و.ن.

المحاولة الثانية

				E_i
	1,1	0,8	---	1,1
	2,6	2	3,4	2,6
	---	2,1	---	2,3
	---	2,1	---	2,4
	---	---	0	-0,8
F_J	0	-0,3	0,8	جدول 1

				E_i
	---	---	-1,9	1,1
	2,3	2,3	---	2,6
	2,4	---	3,1	2,3
	2,4	---	3,2	2,4
	-0,8	-1,1	---	-0,8
F_J	0	-0,3	0,8	جدول 2

---	---	m
---	m	---
1,9	---	2,8
2,2	---	1,7
0	0	---
		جدول 3

---	---	m -1,9
---	M -2,3	---
-0,4	---	-0,3
-0,2	---	-1,5
0,8	1,1	---
		جدول 4

3650-		+5150
3600 +		2200 −
	2900	
	− 2100	+
		2150

1550	7250	
5700		100
	2900	
		2100
		2150

تصبح تكلفة النقل الكلية المحصل عليها بعد المحاولة الثانية تساوي:

35185 − 1,5.(2100) = 32035 و.ن.

المحاولة الثالثة

				E_i
	1,1	0,8	---	1,1
	2,6	---	3,4	2,6
	---	2	---	2,3
	---	---	1,7	0,9
	---	---	0	-0,8
F_j	0	-0,3	0,8	جدول 1

				E_i
	---	---	1,9	1,1
	---	2,3	---	2,6
	2,3	---	3,1	2,3
	0,9	0,6	---	0,9
	-0,8	-1,1	---	-0,8
F_j	0	-0,3	0,8	جدول 2

---	---	m
---	m	---
1,9	---	2,8
2,2	2,1	---
0	0	---
		جدول 3

m---	---	m - 1,9
---	M -2,3	---
-0,4	---	-0,3
1,3	0,5	---
0,8	1,1	---
		جدول 4

	8800	
5700		100
1550	1350	
		2100
		2150

1550 −	7250 +	
5700 +	− 2900	100
		2100
		2150

بعد إجراء المحاولة الثالثة تصبح تكلفة النقل الكلية المحصل عليها تساوي:

32035 − 0,4.(1550) = 31415 و.ن.

المحاولة الرابعة

				E_i
	---	0,8	---	0,7
	2,6	---	3,4	2,6
	1,9	2	---	1,9
	---	---	1,7	0,9
	---	---	0	-0,8
F_J	0	0,1	0,8	جدول 1

				E_i
	0,7	---	1,5	0,7
	---	2,7	---	2,6
	---	---	2,7	1,9
	0,9	1	---	0,9
	-0,8	-0,7	---	-0,8
F_J	0	0,1	0,8	جدول 2

1,1	---	m
---	m	---
---	---	2,8
2,2	2,1	---
0	0	---
		جدول 3

0,4	---	m - 1,5
---	M -2,7	---
---	---	0,1
1,1	1,1	---
0,8	0,7	---
		جدول 4

نلاحظ أن الجدول الرابع للمحاولة الرابعة أصبح لا يحتوي على القيم السالبة (على أساس أن M هي قيمة موجبة كبيرة جدا)، وبالتالي فإن الحل المحصل عليه في المحاولة السابقة (المحاولة الثالثة) هو حل أمثل. بموجب هذا الحل تكون تكلفة النقل الكلية الدنيا المحصل عليها تساوي: $32035 - 0,4.(1550) = 31415$ و.ن.

مثال 2:

الجدول أدناه يتضمن معطيات خاصة بمسألة نقل معينة، حيث نجد الكميات المطلوبة (a_i) في آخر عمود على اليمين والكميات المعروضة (b_j) في الصف السفلي.

الشروط الاضافية في هذه المسألة هي أن الكمية المنقولة من عند (B_1) إلى (A_2) هي محددة بمقدار a_{21} تساوي 60 وحدة، أما طريقا النقل (A_1B_2) و(A_2B_5) فهما مغلقان، أي أنهما غير متاحان للاستعمال. المطلوب إيجاد شبكة النقل الأرخص لنقل المنتج بين الأطراف المختلفة يأخذ في الحسبان الشروط السابقة.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	1	2	3	1	4	180
A_2	6	3	4	5	2	220
A_3	8	2	1	9	3	100
	120	80	160	90	50	500 / 500

الحل

حتى يمكن حل المسألة المعطاة يجب إعادة تحوير جدول المعطيات بحيث يتضمن معطيات الشروط الإضافية المنصوص عليها في المسألة، على أساس أن تكلفتا النقل الوحدويتين C_{12} و C_{25} يصبحان مساويتين ل(mو.ن.). أما في طريق النقل (A_2B_1) فنضع فيه الكمية المفروضة 60 وحدة، بعد ذلك نبحث عن الحل الأمثل للمسألة آخذين بعين الاعتبار الشروط الإضافية.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	1	m	3	1	4	180
A_2	m / 60	3	4	5	2	160
A_3	8	2	1	9	m	100
	60	80	160	90	50	500 / 500

أ-البحث عن الحل الابتدائي

نعتبر أن طريق النقل (A_2B_1)، بعدما تلقى كمية مساوية ل 60 وحدة، أصبح غير مستعمل ولكن تكلفته الوحدوية C_{21} تساوي (mو.ن.). نبحث عن الحل الابتدائي باستعمال طريقة الفروقات الكبرى.

		Δ=7	Δ=1	Δ=2	Δ=4	Δ=1	
		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
Δ=0,3	A_1	1 / 60	m	3 / 30	1 / 90	4	180 / 0
Δ=0,8	A_2	m	3 / 80	4 / 30	5	M / 50	160 / 0
Δ=0,1	A_3	8	2	1 / 100	9	3	100 / 0
		60 / 0	80 / 0	160 / 0	90 / 0	50 / 0	

عدد طرق النقل المستخدمة في الحل الابتدائي تساوي 07، وهي تساوي العدد المطلوب حسب المقياس (n+m+1)، فهذا الحل إذن مقبول. التكلفة الكلية للنقل حسب هذا الحل تساوي 1060 + 50 m و.ن.

ب – الحل الأمثل

من أجل إيجاد الحل الأمثل نستعمل طريقة التحويل كما يلي:

المحاولة الأولى

						E_i
	1	-	3	1	--	1
	-	3	4	-	m	2
	-	-	1	-	--	1-
F_j	0	1	2	0	M −2	جدول 1

						E_i
	--	2	-	-	m −1	1
	2	-	-	2	--	2
	−1	0	-	−1	m −3	1-
F_j	0	1	2	0	M −2	جدول 2

--	m	-	-	4
m	-	-	5	--
8	2	-	9	3
		جدول 3		

-	M -2	-	-	5 -m
M -2	-	-	3	--
9	2	-	10	6 -m
		جدول 4		

60			90	30
60	80	60		20
		100		

60		− 30	90	+
60	80	+ 30		− 50
		100		

تكلفة النقل الكلية المحصل عليها بعد المحاولة الأولى تساوي:

1060 + 50m + 30 .(5 + m−) = 1210+ 20 m و.ن.، مع اعتبار أن طريق النقل (A_2B_1) غير مستعمل.

المحاولة الثانية

					E_i
1	-	-	1	4	1
-	3	4	-	m	M -3
-	-	1	-	-	m- 6
F_j 0	6- m	7- m	0	3	جدول 1

					E_i
-	7 - m	8- m	-	-	1
m - 3	-	-	m- 3	-	M -3
m - 6	0	-	m - 6	m -3	m- 6
F_j 0	6 - m	7- m	0	3	جدول 2

--	m	3	-	--
m	-	-	5	--
8	2	-	9	3
جدول 3				

-	7+ 2m	m -5	-	--
3	-	-	8-m	--
14-m	2	-	15-m	6 -m
جدول 4				

60			90	30
60	80	80		
		80		20

60			90	30
60	80	+ 60		− 20
		− 100		+

كلفة النقل الكلية المحصل عليها بعد المحاولة الأولى تساوي:

$1330 = (6-m).20 + 20m + 1210$ و.ن.

لمحاولة الثالثة

					E_i
1	-	-	1	4	1
-	3	4	-	-	3
-	-	1	-	3	0
F_j 0	0	1	0	3	جدول 1

						E_i
	-	1	2	-	-	1
	3	-	-	3	6	3
	0	0	-	0	-	0
F_j	0	0	1	0	3	جدول 2

--	m	3	-	--
m	-	-	5	m
8	2	-	9	-
جدول 3				

-	M -1	1	-	--
m- 3	-	-	2	M -6
8	2	-	9	
جدول 4				

كل قيم الجدول الرابع موجبة، مما يدل على أنه تم التوصل إلى حل أمثل، قيمة تكلفة النقل الكلية الدنيا المحصل عليها تساوي: **1330** و.ن.

تمارين

أوجد طرق النقل الأقل تكلفة لشبكات النقل المحددة بالمعطيات التالية، حيث الأرقام داخل الجدول تمثل تكاليف النقل الأحادية (C_{ij})، على يمين الجدول الكميات المطلوبة من طرف المستعملين، وفي أسفل الجدول الكميات المتاحة في مصادر التموين.

4	2	4	45
3	2	1	35
5	3	3	55
3	7	5	65
90	60	40	
Rép : 505			

15	1	22	19	1	20
21	18	11	4	3	20
26	29	23	26	24	20
21	10	3	19	27	20
19	19	19	19	4	
Rép : 684					

1	1	0.9	5
0.8	1.4	1	20
0.8	1	1.3	20
10	15	20	
Rép : 42.5			

16	30	17	10	16	4
30	27	26	9	23	6
13	4	22	3	1	10
3	1	5	4	24	10
7	7	7	7	2	
Rép : 191					

2	7	3	4	6
2	5	4	3	9
7	9	6	5	15
7	5	8	10	
Rép : 128				

5	2	3	15
2	4	6	25
5	3	3	35
20	20	45	
Rép : 195			

5	15	3	6	10	9
23	8	13	27	12	11
30	1	5	24	25	14
8	26	7	28	9	16
8	9	13	8	12	
Rép : 339					

9	3	7	2
5	7	8	2
10	2	5	6
3	3	4	
Rép : 46			

2	5	4	22
7	3	3	35
4	8	6	28
20	15	30	
Rép : 201			

3	3	4	
6	4	3	8
9	5	7	5
7	2	2	7
15	9	6	
Rép : 128			

2	5	4	800
3	5	6	500
11	7	8	600
9	4	3	1300
1600	900	700	
Rép : 13000			

7	5	4	3	250
3	4	5	2	150
5	6	6	5	270
170	130	190	200	
Rép : 2710				

2	4	6	7	150
4	4	5	2	70
5	9	3	2	80
55	45	125	55	
Rép : 895				

14	28	21	28	27
10	17	15	24	20
14	30	25	21	43
33	13	27	17	
Rép : 1565				

30	2	5	6	15	16
5	29	9	5	7	15
16	24	14	6	26	14
13	28	4	25	8	15
6	6	13	20	15	
Rép : 329					

7	8	6	40
6	5	10	60
4	3	9	50
30	40	60	
Rép : 720			

450	500	525	130
375	400	425	110
675	750	700	180
150	70	120	
Rép : 172500			

5	6	7	20
6	4	5	5
3	7	3	10
5	3	1	10
9	5	8	5
15	15	20	
Rép : 150			

9	12	9	6	5
7	3	7	7	6
6	6	9	8	11
4	4	7	7	
Rép :141				

6	7	5	10
7	6	11	40
3	2	8	30
20	30	50	
Rép : 470			

1	3	2	50
4	5	7	100
6	2	4	130
70	100	110	
Rép : 910			

29	53	39	29	22	33
15	33	16	3	3	18
16	27	16	3	5	32
35	50	39	20	23	17
20	20	20	20	20	
Rép : 2096					

7	5	4	6	250
3	4	5	2	150
8	6	9	5	270
170	150	190	200	
Rép : 2390				

8	27	17	14	9	120
9	5	10	2	13	150
7	21	18	14	11	160
23	9	11	18	25	70
150	40	30	50	80	
Rép : 2370					

1	16	4	3	50
6	10	1	2	100
8	8	9	7	150
12	6	11	7	200
16	15	13	15	250
100	400	100	100	
Rép : 5450				

1	3	5	50
3	3	2	30
4	1	2	20
30	20	50	
Rép :			

2	3	2	4	1	300
3	4	1	2	4	250
2	3	4	1	2	150
3	4	2	3	2	200
150	100	75	250	200	
Rép : 2950					

2	3	6	8	7	40
5	7	4	2	5	35
7	1	3	1	10	45
20	26	16	38	20	
Rép : 307					

9	17	29	28	8	22
13	21	27	16	29	13
20	30	24	7	26	17
11	19	30	6	2	18
7	7	7	7	42	
Rép : 726					

5	7	9	190
7	4	10	130
4	3	6	80
9	4	8	100
5	7	7	130
200	205	225	
Rép : 3340			

1.1	0.8	1.6	880
2.6	2.4	3.4	580
1.9	2	2.8	290
2.2	2.1	1.7	210
725	1015	435	
Rép : 130990			

7	8	1	2	160
4	5	9	8	140
9	2	3	6	170
120	50	190	110	
Rép : 1330				

الفصل الثاني

مسالة التخصيص

تعتبر مسالة التخصيص واحدة من أهم المشكلات الاقتصادية التي تتطلب في كثير من جوانبها اللجوء إلى تقنيات بحوث العمليات لحلها. المقصود بالتخصيص هو توجيه أو توزيع موارد، نشاطات أو مهام معينة على جهات أو أطراف معينة لتنفيذها، والهدف من ذلك هو استعمال تلك الموارد أو القيام بالنشاطات بأفضل طريقة ممكنة من أجل الحصول على نتائج مثلى.

من المجالات التي نلجأ فيها إلى أسلوب التخصيص نذكر:

- تخصيص وسائل نقل مختلفة، ذات تكلفة نقل مختلفة، لنقل منتجات أو أفراد من أمكنة مختلفة إلى أماكن أخرى.
- تخصيص نشاطات مختلفة على عمال، موظفين، طلبة، باحثين وغيرهم.
- تخصيص وظائف أو مهام مختلفة على منفذين تختلف طبيعتهم حسب اختلاف تخصصهم أو طبيعة العمل المطلوب منهم.

تهدف عملية التخصيص إلى تحقيق أهداف معينة، وتسعى بحوث العمليات إلى تحقيق تلك الأهداف بطريقة مثلى (تعظيم أو تدنية دالة الهدف).

إن استعمال التقنيات الكمية في حل مسائل التخصيص يتطلب أن تتوفر في معطيات هذه المسائل بعض الشروط، ومن أهمها:

كل مهمة أو نشاط يخصص لمنفذ واحد فقط وبالعكس كل منفذ لا يقوم بتنفيذ إلا نشاط واحد فقط. إن هذا يترتب عليه تساوي عدد المنفذين مع عدد المهام أو الأعمال المطلوب تنفيذها.